



T.C.
HATAY MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ MERTEBEDEN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
ANALİTİK ÇÖZÜMLERİ

Fatma Serap BALAKAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

HATAY
TEMMUZ 2019



T.C.
HATAY MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**KESİRLİ MERTEBEDEN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
ANALİTİK ÇÖZÜMLERİ**

Fatma Serap BALAKAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HATAY
TEMMUZ 2019

T.C.
HATAY MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**KESİRLİ MERTEBEDEN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
ANALİTİK ÇÖZÜMLERİ**

Fatma Serap BALAKAN
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

Dr. Öğr. Üyesi Orkun TAŞBOZAN danışmanlığında hazırlanan bu tez 17/07/2019 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından **OYBİRLİĞİ** ile kabul edilmiştir.

Dr. Öğr. Üyesi Orkun TAŞBOZAN
Başkan

Prof. Dr. Bünyamin YILDIZ
Üye

Dr. Öğr. Üyesi Ali KURT
Üye

Kod No:

Prof. Dr. Erdal SERTKAYA
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

17.07.2019

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını ve tez üzerinde Yükseköğretim Kurulu tarafından hiçbir değişiklik yapılamayacağı için tezin bilgisayar ekranında görüntülendiğinde asıl nüsha ile aynı olması sorumluluğunun tarafıma ait olduğunu beyan ederim.

Fatma Serap BALAKAN

ÖZET

KESİRLİ MERTEBEDEN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ANALİTİK ÇÖZÜMLERİ

Beş bölümden oluşan bu tezin, giriş bölümünde kısaca literatür özeti verildi.

İkinci bölümde tez ile ilgili olan daha önce yapılan çalışmalarla ilişkili literatüre yer verildi.

Üçüncü bölümde ise bazı özel fonksiyonlar ile birlikte araştırmalarda sıklıkla kullanılan Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo ve conformable kesirli türev yaklaşımlar verildikten sonra, tezde kullanılan G'/G açılım yöntemi verildi.

Tezin esas kısmı olan dördüncü bölümde ise G'/G açılım yöntemi conformable kesirli mertebeden Benjamin Ono, Jimbo-Miwa, (3+1) boyutlu KP ve BKP denklemlerine uygulanmasıyla analitik çözümler elde edildi.

2019, 47 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemler, G'/G Açılım Yöntemi, Conformable Benjamin Ono Denklemi, Conformable Jimbo-Miwa Denklemleri, Conformable (3+1) Boyutlu KP Denklemi, Conformable (3+1) Boyutlu BKP Denklemi.

ABSTRACT

ANALYTICAL SOLUTIONS OF FRACTIONAL ORDER DIFFERENTIAL EQUATION

In the introduction of this thesis which consists of five chapters a literature review is given shortly.

In the second chapter the literature about previous studies which are relevant to this thesis is given.

In the third chapter after giving some special functions, Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo and conformable fractional derivative which are used frequently in researches, the G'/G expansion method which is used in this thesis is given.

In the fourth chapter which is main part of this thesis, the analytical solutions of conformable fractional Benjamin-Ono, Jimbo-Miwa, (3+1) dimensional KP Equation, (3+1) dimensional BKP equations are obtained by applying the G'/G expansion method to these equations.

2019, 47 Pages

Key Words: Conformable Fractional Differential Equations, G'/G Expansion Method, Conformable Benjamin-Ono Equation, Conformable Jimbo-Miwa Equations, Conformable (3+1) Boyutlu KP Equation, Conformable (3+1) Boyutlu BKP Equation.

TEŞEKKÜR

Danışmanım olduğu andan itibaren tez çalışmamda beni yönlendiren, yol gösteren, bilgisini ve yardımını esirgemeyen, yapıcı eleştiriler sunarak sürecin olumlu devam etmesini sağlayan saygıdeğer hocam Dr. Öğr. Üyesi Orkun TAŞBOZAN’a, işbirliği ve desteği için;

Yapmak istediklerim noktasında bana güvenerek maddi-manevi tüm sıkıntılarda yanımda olan canım eşime, anlayış ve sabrı için;

Eğitimlerim yüzünden bazı zamanlarda yokluğuma katlanmak zorunda kalan kalbimin içi çocuklarıma, gülen gözleriyle umudum oldukları için;

Her konuda, her aşamada beni cesaretlendirerek hayatıma anlam kazandırmamı sağlayan değerli aileme, farkındalıkları için,
en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	II
ABSTRACT.....	III
TEŞEKKÜR.....	IV
ŞEKİLLER DİZİNİ	VI
SİMGELER DİZİNİ	VIII
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	3
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	5
3.1. Kesirli Türev Yaklaşımları.....	5
3.1.1. Grünwald-Letnikov kesirli türev yaklaşımı	5
3.1.2. Riemann-Liouville kesirli türev yaklaşımı.....	6
3.1.3. Caputo kesirli türev yaklaşımı	8
3.1.4. Conformable kesirli türev yaklaşımı	8
3.2. G'/G Açılım Yöntemi	10
4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA	13
4.1. Conformable Kesirli Mertebeden Benjamin Ono Denklemi	13
4.2. Conformable Kesirli Mertebeden Birinci Genişletilmiş Jimbo-Miwa Denklemi	20
4.3. Conformable Kesirli Mertebeden İkinci Genişletilmiş Jimbo-Miwa Denklemi	26
4.4. Conformable Kesirli Mertebeden (3+1) Boyutlu Genelleştirilmiş KP Denklemi.....	32
4.5. Conformable Kesirli Mertebeden (3+1) Boyutlu Genelleştirilmiş BKP Denklemi	38
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	44
KAYNAKLAR	45
ÖZGEÇMİŞ	47

ŞEKİLLER DİZİNİ

[illegible]

Şekil 4.38. $\lambda = 2, \mu = 0.5, \alpha = 0.75$ için $u_1(x, y, z, t)$ analitik çözümünün yüzeyi.....	38
Şekil 4.39. $\lambda = 2, \mu = 0.5, \alpha = 0.9$ için $u_1(x, y, z, t)$ analitik çözümünün yüzeyi.....	39
Şekil 4.40. $\lambda = 2, \mu = 1, \alpha = 0.5$ için $u_2(x, y, z, t)$ analitik çözümünün yüzeyi.....	39
Şekil 4.41. $\lambda = 2, \mu = 1, \alpha = 0.75$ için $u_2(x, y, z, t)$ analitik çözümünün yüzeyi.....	39
Şekil 4.42. $\lambda = 2, \mu = 1, \alpha = 0.9$ için $u_2(x, y, z, t)$ analitik çözümünün yüzeyi.....	40
Şekil 4.43. $\lambda = 1, \mu = 1, \alpha = 0.5$ için $u_3(x, y, z, t)$ analitik çözümünün yüzeyi.....	40
Şekil 4.44. $\lambda = 1, \mu = 1, \alpha = 0.75$ için $u_3(x, y, z, t)$ analitik çözümünün yüzeyi.....	40
Şekil 4.45. $\lambda = 1, \mu = 1, \alpha = 0.9$ için $u_3(x, y, z, t)$ analitik çözümünün yüzeyi.....	41



SİMGELER DİZİNİ

$f^{(n)}(t)$	: $f(t)$ fonksiyonunun n –inci mertebeden türevi
$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	: $f(t)$ fonksiyonunun n –inci mertebeden türevi
$\Gamma(n)$	: Gama Fonksiyonu
${}_a D_t^\beta f(t)$	: $f(t)$ fonksiyonunun β –inci mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli türevi
${}_a \mathbf{D}_t^\beta f(t)$	: $f(t)$ fonksiyonunun β –inci mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi
${}_a^C \mathbf{D}_t^\beta f(t)$	: $f(t)$ fonksiyonunun β –inci mertebeden Caputo kesirli türevi
$T_\alpha(f(t))$	: $f(t)$ fonksiyonunun β –inci mertebeden conformable kesirli türevi

1. GİRİŞ

Doğada meydana gelen birçok olayın çözümlenmesi için matematiksel modelleme sıkça kullanılan bir araçtır. Bu modellemeler sonucunda çoğu zaman diferansiyel denklemler meydana gelmektedir. Bunun sonucunda ise diferansiyel kavramı üzerine 17. yüzyıldan bu yana birçok matematikçi çalışmalar yaptı (Podlubny, 1999).

Tamsayı mertebeden türev kavramı, hayatın olağan akışı içerisinde karşılaşılan problemleri çözmede yetersiz kaldığını fark eden G.W. Leibniz 1695 yılında G.F. Antoine de L'Hospital'e "Tamsayı mertebeli türevler, kesirli mertebeli türevlere genişletilebilir mi?" diye sorarak ilk kez kesirli türeve işaret etti. Bu soru ile 1695 yılında kesirli türev kavramı literatürde yerini aldı. Kesirli türev kavramı bu tarihten sonra popüler bir konu haline geldi ve hala birçok kişi bu kavramın gelişmesinde rol oynamaktadır. İlk kez 1695 yılında ortaya çıkan kesirli türev kavramının gelişmesinde Laplace, Fourier, Abel, Riemann ve Liouville gibi ünlü matematikçilerin büyük rolü vardır (Podlubny, 1999). 1730 yılında L. Euler ise Gama fonksiyonunu tanımlayıp, kesirli türev için bir formül elde etti. Daha sonra, ünlü matematikçi olan Liouville ise Gama fonksiyonu yardımı ile kesirli türev için bir yaklaşım ortaya koydu (Podlubny, 1999). Aynı yüzyılda bir diğer ünlü matematikçi olan Riemann ise başka bir yaklaşım tanımladı ve daha sonra Liouville'nin yaptığı tanım ile birleştirerek Riemann-Liouville kesirli mertebeden türev yaklaşımı meydana geldi (Podlubny, 1999). Grünwald-Letnikov kesirli mertebeden türev yaklaşımı olarak bilinen ve sonlu fark yaklaşımı yardımı ile elde edilen yaklaşım ise Grünwald ve Letnikov tarafından tanımlandı. Bu yaklaşımında Riemann-Liouville kesirli türev yaklaşımı ile bazı şartlar sağlandığında birbirlerine denk olduğu gösterildi (Podlubny, 1999). Literatürde öneml bir yere sahip olan diğer bir kesirli türev yaklaşımı olan Caputo yaklaşımı 1967 yılında M. Caputo tarafından literatüre kazandırıldı (Podlubny, 1999). 2014 yılında, R. Khalil ve arkadaşlarının tanımladığı conformable kesirli türev yaklaşımı ise normal türev cinsinden ifade edilmesinden ve türev özelliklerini sağlamasından dolayı çalışmalarda sıklıkla kullanılan kesirli türev yaklaşımı haline geldi. Bu tanımın, diğer kesirli türev yaklaşımlarına göre avantajlı noktaları bulunmaktadır (Khalil ve ark., 2014).

Kesirli türev kavramı ise uygulamalı matematiğin yanı sıra hayatın içerisinde yer alan fizik, mimarlık ve mühendislik gibi bilim dallarında oldukça sık kullanılmaktadır. Bunun doğal bir sonucu olarak kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemler, doğadaki ve uygulamalı bilimlerdeki birçok alanda sistematik ve dinamik modellemeler üretilmesi açısından son derece önem arz etmektedir (Podlubny, 1999).



2.ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem olan Benjamin Ono, birinci genişletilmiş Jimbo-Miwa, ikinci genişletilmiş Jimbo-Miwa, (3+1) boyutlu genelleştirilmiş Kadomtsev-Petviashvili (KP) ve (3+1) boyutlu genelleştirilmiş B tipli Kadomtsev-Petviashvili (BKP) denklemlerinin analitik çözümleri birçok araştırmacı tarafından araştırıldı.

R. Dutta ve arkadaşları, Benjamin Ono denkleminin nümerik çözümlerini sonlu farklar yöntemi ile 2016 yılında elde etti (Dutta ve ark., 2016). 2016 yılında yapılan bir diğer çalışmada ise Benjamin Ono denkleminin analitik çözümleri V. Benci ve D. Fortunato tarafından bulundu (Benci ve Fortunato, 2016). 2017 yılında W. Tan ve Z. Dai ise Benjamin Ono denkleminin analitik çözümlerini Hirota bilineer yöntemi yardımı ile elde ettiler (Tan ve Dai, 2017). M. Kaplan ve arkadaşları tarafından yapılan çalışmada ise Benjamin Ono denkleminin analitik çözümleri elde edildi (Kaplan ve ark., 2018). 2018 yılında A. M. Wazwaz tarafından yapılan çalışmada Hirota bilineer yöntemi kullanılarak Benjamin Ono denkleminin analitik çözümleri elde edildi (Wazwaz, 2018). 2018 yılında yapılan bir diğer çalışmada ise C. M. Fang ve arkadaşları tarafından Benjamin Ono denkleminin analitik çözümleri Bäcklund dönüşümü kullanılarak bulundu (Fang ve ark., 2018). 2019 yılında H. Yang ve arkadaşları tarafından yapılan çalışmada ise Hirota bilineer yöntemi kullanılarak Benjamin Ono denkleminin analitik çözümleri elde edildi (Yang ve ark., 2019).

2002 yılında Z. J. Fang ve W. F. Min, Jimbo-Miwa denkleminin analitik çözümlerini Bäcklund dönüşümü kullanılarak buldular (Fang ve Min, 2002). 2003 yılında Z. Lü ve H. Zhang, genişletilmiş tanjant hiperbolik yöntemini kullanarak Jimbo-Miwa denkleminin analitik çözümlerini elde ettiler (Lü ve Zhang, 2003). D. Wang ve arkadaşları tarafından 2007 yılında yapılan çalışmada ise Jimbo-Miwa denklemi analitik olarak genişletilmiş rasyonel açılım yöntemi ile çözüldü (Wang ve ark., 2007). 2008 yılında Wazwaz tarafından yapılan çalışmada ise Jimbo-Miwa denkleminin analitik çözümleri Hirota bilineer yöntemi kullanılarak bulundu (Wazwaz, 2008). 2009 yılında ise W.X. Ma ve J.H. Lee tarafından yapılan çalışmada Jimbo-Miwa denkleminin analitik çözümleri bulundu (Ma ve Lee, 2009). 2017 yılında H. Q. Sun ve A. H. Chen, birinci ve ikinci genişletilmiş Jimbo-Miwa denklemlerinin analitik çözümlerini bilineer

formlar yardımıyla elde ettiler (Sun ve Chen, 2017). 2017 yılında Wazwaz tarafından yapılan çalışmada ise birinci ve ikinci genişletilmiş Jimbo-Miwa denklemlerinin analitik çözümlerini Hirota bilineer yöntemi kullanılarak bulundu (Wazwaz, 2017). 2018 yılında Y. H. Wang ve arkadaşları tarafından yapılan çalışmada Jimbo-Miwa denklemi analitik olarak çözüldü (Wang ve ark., 2018).

2003 yılında Y. Chen ve arkadaşları tarafından yapılan çalışmada KP denkleminin analitik çözümleri genelleştirilmiş dönüşüm yardımı ile elde edildi (Chen ve ark., 2003). H. Chen ve H. Zhang tarafından 2004 yılında yapılan çalışmada KP denkleminin analitik çözümleri Riccati denklemi yardımıyla elde edildi (Chen ve Zhang, 2004). 2007 yılında A. M. Wazwaz tarafından yapılan çalışmada KP denkleminin analitik çözümleri tanjant hiperbolik ve cotanjant hiperbolik yöntemleri kullanılarak bulundu (Wazwaz, 2007). 2009 yılında M. Khalfallah, KP denkleminin analitik çözümlerini elde etti (Khalfallah, 2009). 2012 yılında yapılan çalışmada W. X. Ma ve Z. Zhu, Hirota bilineer yöntemini kullanılarak KP denkleminin analitik çözümünü elde ettiler (Ma ve Zhu, 2012). 2012 yılında A. M. Wazwaz tarafından yapılan çalışmada ise KP denkleminin analitik çözümleri basitleştirilmiş Hirota bilineer yöntemi ile elde edildi (Wazwaz, 2012). 2017 yılında H. Zhao ve W. X. Ma tarafından yapılan çalışmada ise Hirota bilineer yöntemini kullanılarak KP denkleminin analitik çözümleri elde edildi (Zhao ve Ma, 2017).

2011 yılında Wazwaz tarafından yapılan çalışmada BKP denkleminin analitik çözümü Hirota yöntemi ile elde edildi (Wazwaz, 2011). 2012 yılında yapılan çalışmada W. X. Ma ve Z. Zhu, Hirota bilineer yöntemini kullanılarak BKP denkleminin analitik çözümünü elde ettiler (Ma ve Zhu, 2012). 2015 yılında X.Y. Gao tarafından yapılan çalışmada BKP denkleminin analitik çözümleri Bäcklund dönüşümü yardımı ile elde edildi (Gao, 2015). 2016 yılında J. M. Tu ve arkadaşları tarafından yapılan çalışmada BKP denklemi analitik olarak çözüldü (Tu ve ark., 2016). 2017 yılında J. Zhang ve W. X. Ma, BKP denkleminin analitik çözümlerini Hirota bilineer yöntemi kullanılarak elde ettiler (Zhang ve Ma, 2017).

3.MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, bazı kesirli türev yaklaşımları açıklandıktan sonra, G'/G açılım yöntemi verildi.

3.1. Kesirli Türev Yaklaşımları

Bu kısımda, literatürde sıklıkla kullanılan Grünwald-Letnikov, Rieman-Liouville ve Caputo kesirli türev yaklaşımlarının yanında tezde ele alınan, kesirli mertebeden kısmi türevli denklemlerde kullanılan conformable kesirli türev yaklaşımı verildi.

3.1.1.Grünwald-Letnikov kesirli türev yaklaşımı

$l \leq \alpha < l + 1$ şartını sağlayan l tamsayısı için $[b, t]$ kapalı aralığında $f(t)$ fonksiyonu ve $f^{(k)}(t)$ ($k = 1, 2, \dots, l + 1$) türevleri sürekli olsunlar. $f(t)$ fonksiyonunun α -ıncı mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli türev yaklaşımı

$${}_b D_t^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^l \frac{f^{(k)}(b)(t-b)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-\alpha+l+1)} \int_b^t (t-\tau)^{-\alpha+l} f^{(l+1)}(\tau) d\tau$$

olarak tanımlıdır (Podlubny, 1999). Burada $\Gamma(x)$ fonksiyonu, Gama fonksiyonu olarak adlandırılır ve

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty y^{x-1} e^{-y} dy$$

ile tanımlıdır (Podlubny, 1999).

Grünwald-Letnikov kesirli türev yaklaşımının bazı önemli özellikleri aşağıda verildi (Podlubny, 1999).

- i. Grünwald-Letnikov kesirli türev operatörü, lineerlik özelliğini sağlamaktadır.
- ii. l tamsayı ve $\alpha > 0$ olmak üzere, $f^{(k)}(b) = 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots, l - 1$) özellikleri geçerli ise

$$\frac{d^l}{dt^l} \left({}_b D_t^\alpha f(t) \right) = {}_b D_t^\alpha \left(\frac{d^l f(t)}{dt^l} \right) = {}_b D_t^{\alpha+l} f(t)$$

eşitliği sağlanmaktadır.

iii. l ve n pozitif tamsayılar olmak üzere $l < \alpha < l + 1$ ve $n < \beta < n + 1$ eşitsizlikleri verilsin. $f^{(k)}(b) = 0, (k = 0, 1, 2, \dots, r - 1; r = \max(l, n))$ özelliği sağlanıyor ise

$${}_b D_t^\beta ({}_b D_t^\alpha f(t)) = {}_b D_t^\alpha ({}_b D_t^\beta f(t)) = {}_b D_t^{\alpha+\beta} f(t)$$

şeklindeki eşitlikler geçerlidir.

iv. l pozitif tamsayı olmak üzere $l < \alpha < l + 1$ ve $\beta < 0$ eşitsizlikleri verilmiş olsun. Bu durumda $f^{(k)}(b) = 0, (k = 0, 1, 2, \dots, l - 1)$ özelliği sağlanıyor ise

$${}_b D_t^\beta ({}_b D_t^\alpha f(t)) = {}_b D_t^{\alpha+\beta} f(t)$$

eşitliği geçerlidir.

v. $\alpha < 0$ ve β herhangi bir reel sayı olmak üzere

$${}_b D_t^\beta ({}_b D_t^\alpha f(t)) = {}_b D_t^{\alpha+\beta} f(t)$$

şeklindedir.

3.1.2. Riemann-Liouville kesirli türev yaklaşımı

k pozitif bir tamsayı ve $\alpha = k - b > 0$ olmak üzere, $f(t)$ fonksiyonu (b, t) aralığında sürekli ve integrallenebilir olsun. Bu şartlar altında, $f(t)$ fonksiyonunun α -ıncı mertebeden Riemann-Liouville kesirli türev yaklaşımı

$${}_b D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \frac{d^k}{dt^k} \int_b^t (t-\tau)^{(k-\alpha-1)} f(\tau) d\tau = \frac{d^k}{dt^k} ({}_b D_t^{-(k-\alpha)} f(t)), \quad (k-1 \leq \alpha < k)$$

olarak tanımlıdır (Podlubny, 1999).

Riemann-Liouville kesirli türev yaklaşımının bazı önemli özellikleri aşağıda verildi (Podlubny, 1999).

i. Riemann-Liouville kesirli türev operatörü lineerlik özelliğini sağlamaktadır.

ii. $\alpha > 0, \beta > 0$ olmak üzere;

$${}_b D_t^{-\beta} ({}_b D_t^{-\alpha} f(t)) = {}_b D_t^{-\alpha} ({}_b D_t^{-\beta} f(t)) = {}_b D_t^{-(\alpha+\beta)} f(t)$$

eşitliği sağlanmaktadır.

iii. $\alpha > 0$ olmak üzere

$${}_b D_t^\alpha ({}_b D_t^{-\alpha} f(t)) = f(t)$$

eşitliği geçerlidir. Fakat k bir tamsayı olmak üzere $k - 1 \leq \alpha < k$ şartını sağlayan α sayısı için

$${}_b D_t^{-\alpha} ({}_b D_t^\alpha f(t)) = f(t) - \sum_{j=1}^k [{}_b D_t^{\alpha-j} f(t)]_{t=b} \frac{(t-b)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)}$$

eşitliği sağlanmaktadır.

iv. $\alpha > 0$, $\beta > 0$ şartını sağlamak üzere

$${}_b D_t^\alpha ({}_b D_t^{-\beta} f(t)) = {}_b D_t^{\alpha-\beta} f(t)$$

$${}_b D_t^{-\alpha} ({}_b D_t^\beta f(t)) = {}_b D_t^{\beta-\alpha} f(t) - \sum_{j=1}^k [{}_b D_t^{\beta-j} f(t)]_{t=b} \frac{(t-b)^{\beta-j}}{\Gamma(\beta-j+1)}, (k-1 \leq \beta < k)$$

eşitlikleri geçerlidir.

v. l tamsayı olmak üzere eğer $f^{(k)}(a) = 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots, l-1$) ise

$$\frac{d^l}{dt^l} ({}_b D_t^\alpha f(t)) = {}_b D_t^\alpha \left(\frac{d^l f(t)}{dt^l} \right) = {}_b D_t^{\alpha+l} f(t)$$

eşitliği sağlanır.

vi. l ve n pozitif tamsayıları için $l-1 \leq \alpha < l$ ve $n-1 \leq \beta < n$ olmak üzere

$${}_b D_t^\alpha ({}_b D_t^\beta f(t)) = {}_b D_t^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{j=1}^n [{}_b D_t^{\beta-j} f(t)]_{t=b} \frac{(t-b)^{-\alpha-j}}{\Gamma(-\alpha-j+1)}$$

$${}_b D_t^\beta ({}_b D_t^\alpha f(t)) = {}_b D_t^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{j=1}^l [{}_b D_t^{\alpha-j} f(t)]_{t=b} \frac{(t-b)^{-\beta-j}}{\Gamma(-\beta-j+1)}$$

eşitlikleri sağlanır. Bu iki eşitliğin birbirine eşit olması için

$$[{}_b D_t^{\alpha-j} f(t)]_{t=b} = 0, (j = 1, 2, \dots, l)$$

$$[{}_b D_t^{\beta-j} f(t)]_{t=b} = 0, (j = 1, 2, \dots, l)$$

şartları sağlanmalıdır.

$f(t)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve $m+1$ defa sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise, bu durumda $m \leq \alpha < m+1$ şartını sağlayan α değerleri için ${}_b D_t^\alpha f(t)$ Riemann-Liouville kesirli türev ile ${}_b D_t^\alpha f(t)$ Grünwald-Letnikov kesirli türev yaklaşımları birbirine denktir. Burada m pozitif bir tamsayıdır.

3.1.3. Caputo kesirli türev yaklaşımı

Caputo kesirli türev yaklaşımı $f(t)$ fonksiyonu n defa sürekli diferansiyellenebilir olmak üzere $n - 1 < \alpha < n$ için

$${}_b^C D_t^\alpha f(t) = D^{\alpha-n} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}$$

olarak tanımlıdır (Podlubny, 1999).

3.1.4. Conformable kesirli türev yaklaşımı

Önceki kısımlarda verilen Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türev yaklaşımlarının her ikisi birden lineerlik özelliğini sağlamaktadır. Fakat, bu iki kesirli türev yaklaşımı aşağıda verilen özellikleri sağlamamaktadır (Khalil ve ark., 2014).

i. Riemann-Liouville kesirli türevi $D_a^\alpha(1) = 0$ eşitliğini sağlamaz. Yani sabit bir fonksiyonun Riemann-Liouville kesirli mertebeden türevi sıfıra eşit değildir.

ii. Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türev yaklaşımları

$$D_a^\alpha(fg) = f D_a^\alpha(g) + g D_a^\alpha(f)$$

eşitliğini sağlamazlar.

iii. Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türev yaklaşımları

$$D_a^\alpha(f/g) = \frac{g D_a^\alpha(f) - f D_a^\alpha(g)}{g^2}$$

eşitliğini sağlamazlar.

iv. Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türev yaklaşımları

$$D_a^\alpha(f \circ g)(t) = f^{(\alpha)}(g(t)) g^{(\alpha)}(t)$$

eşitliğini sağlamazlar.

v. Genel olarak, Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türev yaklaşımları

$$D^\alpha D^\beta f = D^{\alpha+\beta} f$$

eşitliğini sağlamazlar.

Yukarıda verilen özellikleri sağlayan conformable kesirli türev yaklaşımı Khalil ve arkadaşları tarafından 2014 yılında verildi (Khalil ve ark., 2014). Bu türev yaklaşımı normal türev cinsinden ifade edilebildiğinden dolayı türev ile ilgili çoğu özelliği sağlar.

Tanım 3.1. $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere bir f fonksiyonu verilsin. O halde f fonksiyonunun α –ıncı mertebeden conformable kesirli türevi, $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere,

$$T_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

olarak tanımlanır (Khalil ve ark., 2014).

Conformable kesirli türev tanımından $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$ olduğu kolayca görülmektedir. Bu eşitlikten, herhangi bir polinom fonksiyonunun conformable kesirli türevi ile Riemann-Liouville, Caputo kesirli türevleri örtüşmektedir (Khalil ve ark., 2014).

Teorem 3.1. $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere $f: (0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $t_0 > 0$ noktasında α –ıncı mertebeden türevlenebilir olsun. O halde f fonksiyonu t_0 noktasında süreklidir (Khalil ve ark., 2014).

İspat: $f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0) = \frac{f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)}{\varepsilon} \varepsilon$

eşitliği yardımıyla

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)}{\varepsilon} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon.$$

olarak yazılır. Bu eşitlikte

$$h = \varepsilon t_0^{1-\alpha}$$

olarak alınırsa

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(t_0 + h) - f(t_0)] = f^{(\alpha)}(t_0)$$

bulunur. Buradan

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(t_0 + h) = f(t_0).$$

eşitliğinden f fonksiyonunun t_0 noktasında sürekli olduğu görülür.

Teorem 3.2. $\alpha \in (0,1)$ ve bir $t > 0$ noktasında f, g fonksiyonları α –ıncı mertebeden türevlenebilir olsun. Bu durumda

- 1) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $T_\alpha(af + bg) = aT_\alpha(f) + bT_\alpha(g)$,
- 2) $\forall p \in \mathbb{R}$ için $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$,
- 3) λ reel bir sabit olmak üzere $f(t) = \lambda$ fonksiyonu için $T_\alpha(\lambda) = 0$,
- 4) $T_\alpha(fg) = fT_\alpha(g) + gT_\alpha(f)$,
- 5) $T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gT_\alpha(f) - fT_\alpha(g)}{g^2}$,
- 6) f türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere $T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha} \frac{df}{dt}(t)$

eşitlikleri geçerlidir (Khalil ve ark., 2014).

Tanım 3.2. n pozitif bir tamsayı, $t > 0$, $\alpha \in (n, n + 1]$ ve f fonksiyonu α –inci mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda α –inci mertebeden f fonksiyonunun conformable kesirli türevi

$$T_{\alpha}(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f^{([\alpha]-1)}(t+\varepsilon t^{([\alpha]-\alpha)}) - f^{([\alpha]-1)}(t)}{\varepsilon}$$

olarak tanımlanır. Burada $[\alpha]$, α 'ya eşit ya da büyük en küçük tamsayıdır (Khalil ve ark., 2014).

Ayrıca, f fonksiyonu $(n + 1)$ –inci mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon ise

$$T_{\alpha}(f)(t) = t^{([\alpha]-\alpha)} f^{[\alpha]}(t)$$

eşitliği geçerlidir.

3.2. G'/G Açılım Yöntemi

Bu kısımda, conformable kesirli mertebeden lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek için kullanılan G'/G açılım yöntemi verildi.

G'/G açılım yöntemi ilk olarak 2008 yılında M. Wang ve arkadaşları tarafından lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler olan KdV, mKdV, Boussinesq ve Hirota–Satsuma denklemlerinin analitik çözümlerini bulmak için kullanıldı (Wang ve ark., 2008). 2012 yılında ise Z. Bin tarafından yapılan çalışmada, modifiye edilmiş Riemann–Liouville kesirli türev içeren genelleştirilmiş Hirota–Satsuma–KdV ve beşinci mertebeden Sawada–Kotera denklemlerinin analitik çözümleri G'/G açılım yöntemi kullanılarak elde edildi (Bin, 2012). 2017 yılında, Kurt ve arkadaşları G'/G açılım yöntemini kullanarak conformable kesirli mertebeden türev içeren Nizhnik–Novikov–Veselov sisteminin analitik çözümünü elde ettiler (Kurt ve ark., 2017).

G'/G açılım yönteminin genel bir conformable kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemine uygulanması aşağıda verildi (Kurt ve ark., 2017).

x, y, z, t bağımsız değişkenler ve bu bağımsız değişkenlere bağlı $u(x, y, z, t)$ fonksiyonu bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere

$$P\left(u, \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial^{2\alpha} u}{\partial t^{2\alpha}}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \dots\right) = 0 \quad (3.2.1)$$

şeklinde conformable kesirli türev içeren lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemini ele alalım. Burada $\alpha \in (0,1)$ olup, $\frac{\partial^{2\alpha} u}{\partial t^{2\alpha}}$ kesirli mertebeden türevi $u(x, y, z, t)$ fonksiyonunun α –mertebeden iki defa conformable kesirli mertebeden türevini göstermektedir. (3.2.1) ile verilen conformable kesirli mertebeden lineer olmayan kısmi diferansiyel denkleme $u(x, y, z, t) = u(\xi)$ ve k, l, m, p daha sonra belirlenecek olan katsayılar olmak üzere

$$\xi = kx + ly + mz + p \frac{t^\alpha}{\alpha}$$

şeklinde dönüşüm uygulanırsa, ξ bağımsız değişkenine bağlı lineer olmayan adi diferansiyel denklem

$$Q(u, u_\xi, u_{\xi\xi}, u_{\xi\xi\xi}, \dots) = 0 \quad (3.2.2)$$

olarak elde edilir. (3.2.2) ile verilen diferansiyel denklemi analitik olarak çözmek için, bu denklemde $\left(\frac{G'}{G}\right)$ ifadesinin kuvvetlerini içeren

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \left(\frac{G'}{G}\right)^i \quad (3.2.3)$$

şeklinde analitik çözüm aranır (Wang ve ark., 2008). Burada $G = G(\xi)$ değeri

$$G'' + \lambda G' + \mu G = 0 \quad (3.2.4)$$

şeklindeki ikinci mertebeden lineer olan adi türevli diferansiyel denklemini sağlamaktadır ve $\alpha_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$, λ , μ daha sonra belirlenecek olan sabitlerdir (Wang ve ark., 2008). (3.2.3) eşitliğindeki n pozitif tamsayısının değeri

(3.2.2) diferansiyel denkleminde bulunan en yüksek mertebeden türev içeren terim ile en yüksek dereceden lineer olmayan terim arasındaki homojen dengeden elde edilir (Wang ve ark., 2008). (3.2.4) ile verilen adi türevli diferansiyel denklemin analitik çözümlerinden $\frac{G'}{G}$ çözümü λ ve μ değişkenlerinin durumuna göre, c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere

$$\frac{G'}{G} = \begin{cases} -\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left(\frac{c_1 \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi\right) + c_2 \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi\right)}{c_1 \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi\right) + c_2 \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi\right)} \right), & \lambda^2 - 4\mu > 0 \\ -\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \left(\frac{-c_1 \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi\right) + c_2 \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi\right)}{c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi\right)} \right), & \lambda^2 - 4\mu < 0 \\ -\frac{\lambda}{2} + \frac{c_2}{c_1 + c_2 \xi}, & \lambda^2 - 4\mu = 0 \end{cases}$$

şeklindedir (Bin, 2012).

(3.2.3) ile verilen $u(\xi)$ değerinin ve gerekli türevlerinin (3.2.2) denkleminde yerlerine yazıldıktan sonra (3.2.4) diferansiyel denkleminin yardımı ile $\left(\frac{G'}{G}\right)$ teriminin kuvvetlerine bağlı bir cebirsel denklem elde edilir. Elde edilen cebirsel denklemde mevcut olan $\left(\frac{G'}{G}\right)^i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) terimlerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle a_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), λ, μ, k, l, m, p terimlerine bağlı cebirsel denklem sistemi bulunur. Bu denklem sisteminin çözülmesiyle elde edilen çözüm kümesinin, (3.2.4) ile verilen diferansiyel denklemin yukarıda verilen $\frac{G'}{G}$ çözümünde yerlerine yazılır. Son olarak, $\frac{G'}{G}$ çözümlerinin (3.2.3) ile verilen eşitlikte kullanılmasıyla (3.2.1) ile verilen conformable kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemin analitik çözümleri elde edilir (Wang ve ark., 2008).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Bu bölümde, conformable kesirli mertebeden türev içeren lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem olan Benjamin Ono, birinci genişletilmiş Jimbo-Miwa, ikinci genişletilmiş Jimbo-Miwa, (3+1) boyutlu genelleştirilmiş KP ve (3+1) boyutlu genelleştirilmiş BKP denklemlerinin analitik çözümleri G'/G açılım yöntemi yardımı ile verildi.

4.1. Conformable Kesirli Mertebeden Benjamin Ono Denklemini

α, β, γ reel sabitler ve $0 < p < 1$ olmak üzere conformable kesirli mertebeden türev içeren kısmi diferansiyel denklem olan Benjamin Ono denklemi,

$$\frac{\partial^{2p} u}{\partial t^{2p}} + \alpha \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \gamma \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0 \quad (4.1.1)$$

olarak verilsin. (4.1.1) kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denkleminde $u = u(\xi)$ ve k, w, m reel sabitler olmak üzere

$$\xi = kx + wy - m \frac{t^p}{p} \quad (4.1.2)$$

dalga dönüşümü uygulanırsa

$$m^2 u'' + \alpha k^2 (u^2)'' + \beta k^4 u^{(iv)} + \gamma w^4 u^{(iv)} = 0 \quad (4.1.3)$$

şeklinde ξ bağımsız değişkenine bağlı tamsayı mertebeden türevler içeren adi diferansiyel denklemi bulunur. (4.1.3) denkleminde gerekli düzenlemeler yapılsa

$$m^2 u'' + 2\alpha k^2 ((u')^2 + uu'') + \beta k^4 u^{(iv)} + \gamma w^4 u^{(iv)} = 0 \quad (4.1.4)$$

denklemi elde edilir. (4.1.4) adi türevli diferansiyel denkleminde, n pozitif bir tamsayı ve $G = G(\xi)$ olmak üzere

$$u(\xi) = a_n \left(\frac{G'}{G} \right)^n + a_{n-1} \left(\frac{G'}{G} \right)^{n-1} + \dots \quad (4.1.5)$$

şeklinde çözüm aransın. Burada $G = G(\xi)$ değeri

$$G'' + \lambda G' + \mu G = 0 \quad (4.1.6)$$

şeklindeki ikinci mertebeden lineer olan adi türevli diferansiyel denklemini sağlamaktadır. (4.1.5) ve (4.1.6) eşitliklerinin kullanılmasıyla, (4.1.4) denklemindeki en yüksek mertebeden türev olan $u^{(iv)}$ terimi ile en yüksek mertebeden lineer olmayan terim içeren $(u')^2$ terimleri

$$u^{(iv)} = n(n+1)(n+2)(n+3)a_n \left(\frac{G'}{G}\right)^{n+4} + \dots, \quad (4.1.7)$$

$$(u')^2 = n^2 a_n^2 \left(\frac{G'}{G}\right)^{2n+2} + \dots \quad (4.1.8)$$

olarak bulunur. (4.1.7) ve (4.1.8) eşitliklerinde yer alan $u^{(iv)}$ ve $(u')^2$ terimleri arasındaki homojen dengeden $n = 2$ değeri bulunur. Böylece (4.1.1) denkleminin analitik çözümlerini bulmak için (4.1.4) denkleminde a_0, a_1, a_2 daha sonra belirlenecek olan katsayılar olmak üzere

$$u(\xi) = a_0 + a_1 \left(\frac{G'}{G}\right) + a_2 \left(\frac{G'}{G}\right)^2 \quad (4.1.9)$$

şeklinde analitik çözüm aranır. (4.1.9) eşitliğinden yararlanarak (4.1.4) denkleminde yer alan u', u'' ve $u^{(iv)}$ türevleri

$$u' = -2a_2 \left(\frac{G'}{G}\right)^3 - (a_1 + 2a_2\lambda) \left(\frac{G'}{G}\right)^2 - (a_1\lambda + 2a_2\mu) \left(\frac{G'}{G}\right) - a_1\mu,$$

$$u'' = 6a_2 \left(\frac{G'}{G}\right)^4 + (2a_1 + 10a_2\lambda) \left(\frac{G'}{G}\right)^3 + (3a_1\lambda + 4a_2(\lambda^2 + 2\mu)) \left(\frac{G'}{G}\right)^2 + (a_1(\lambda^2 + 2\mu) + 6a_2\lambda\mu) \left(\frac{G'}{G}\right) + a_1\lambda\mu + 2a_2\mu^2,$$

$$\begin{aligned} u^{(iv)} = & 120a_2 \left(\frac{G'}{G}\right)^6 + (336a_2\lambda + 24a_1) \left(\frac{G'}{G}\right)^5 + (-4(-54a_2\lambda - 6a_1)\lambda + 192a_2\mu + \\ & 9(2a_1 + 10a_2\lambda)\lambda + 18a_1\lambda + 24a_2(\lambda^2 + 2\mu)) \left(\frac{G'}{G}\right)^4 + (-4(-54a_2\lambda - 6a_1)\mu - \\ & 3(-24a_2\mu - 3(2a_1 + 10a_2\lambda)\lambda - 6a_1\lambda - 8a_2(\lambda^2 + 2\mu))\lambda + 6(2a_1 + 10a_2\lambda)\mu + \\ & 4(3a_1\lambda + 4a_2(\lambda^2 + 2\mu))\lambda + 2a_1(\lambda^2 + 2\mu) + 12a_2\lambda\mu) \left(\frac{G'}{G}\right)^3 + (-3(-24a_2\mu - \\ & 3(2a_1 + 10a_2\lambda)\lambda - 6a_1\lambda - 8a_2(\lambda^2 + 2\mu))\mu + 2(3a_1\lambda + 4a_2(\lambda^2 + 2\mu))\mu + \end{aligned}$$

$$(a_1(\lambda^2 + 2\mu) + 6a_2\lambda\mu)\lambda - 2(-3(2a_1 + 10a_2\lambda)\mu - 2(3a_1\lambda + 4a_2(\lambda^2 + 2\mu))\lambda - a_1(\lambda^2 + 2\mu) - 6a_2\lambda\mu)\lambda \left(\frac{G'}{G}\right)^2 + (-2(-3(2a_1 + 10a_2\lambda)\mu - 2(3a_1\lambda + 4a_2(\lambda^2 + 2\mu))\lambda - a_1(\lambda^2 + 2\mu) - 6a_2\lambda\mu)\mu - 2(3a_1\lambda + 4a_2(\lambda^2 + 2\mu))\mu - (a_1(\lambda^2 + 2\mu) + 6a_2\lambda\mu)\lambda)\lambda \left(\frac{G'}{G}\right) - (-2(3a_1\lambda + 4a_2(\lambda^2 + 2\mu))\mu - (a_1(\lambda^2 + 2\mu) + 6a_2\lambda\mu)\lambda)\mu$$

olarak hesaplanır. u', u'' ve $u^{(iv)}$ türevlerinin değerleri, (4.1.4) denkleminde yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} & (20\alpha k^2 a_2^2 + 120\gamma w^4 a_2 + 120\beta k^4 a_2) \left(\frac{G'}{G}\right)^6 + (24\beta k^4 a_1 + 336\beta k^4 \lambda a_2 + \\ & 24\gamma w^4 a_1 + 36\alpha k^2 \lambda a_2^2 + 336\gamma w^4 \lambda a_2 + 24\alpha k^2 a_1 a_2) \left(\frac{G'}{G}\right)^5 + (16\alpha k^2 \lambda^2 a_2^2 + \\ & 240\gamma w^4 \mu a_2 + 6\alpha k^2 a_1^2 + 42\alpha k^2 \lambda a_1 a_2 + 12\alpha k^2 a_0 a_2 + 60\beta k^4 \lambda a_1 + 60\gamma w^4 \lambda a_1 + \\ & 32\alpha k^2 \mu a_2^2 + 330\beta k^4 \lambda^2 a_2 + 240\beta k^4 \mu a_2 + 6m^2 a_2 + 330\gamma w^4 \lambda^2 a_2) \left(\frac{G'}{G}\right)^4 + \\ & (20\alpha k^2 \lambda a_0 a_2 + 28\alpha k^2 \lambda \mu a_2^2 + 130\beta k^4 \lambda^3 a_2 + 10\alpha k^2 \lambda a_1^2 + 440\gamma w^4 \lambda \mu a_2 + \\ & 40\beta k^4 \mu a_1 + 50\gamma w^4 \lambda^2 a_1 + 130\gamma w^4 \lambda^3 a_2 + 50\beta k^4 \lambda^2 a_1 + 18\alpha k^2 \lambda^2 a_1 a_2 + \\ & 4\alpha k^2 a_0 a_1 + 2m^2 a_1 + 40\gamma w^4 \mu a_1 a_2 + 10m^2 \lambda a_2 + 440\beta k^4 \lambda \mu a_2) \left(\frac{G'}{G}\right)^3 + \\ & (232\beta k^4 \mu \lambda^2 a_2 + 60\gamma w^4 \lambda \mu a_1 + 8\alpha k^2 \mu a_1^2 + 16\beta k^4 \lambda^4 a_2 + 232\gamma w^4 \mu \lambda^2 a_2 + \\ & 12\alpha k^2 \mu^2 a_2^2 + 136\beta k^4 \mu^2 a_2 + 60\beta k^4 \lambda \mu a_1 + 136\gamma w^4 \mu^2 a_2 + 16\alpha k^2 \mu a_0 a_2 + \\ & 3m^2 \lambda a_1 + 30\alpha k^2 \mu \lambda a_1 a_2 + 4\alpha k^2 \lambda^2 a_1^2 + 8\alpha k^2 \lambda^2 a_0 a_2 + 16\gamma w^4 \lambda^4 a_2 + \\ & 15\beta k^4 \lambda^3 a_1 + 15\gamma w^4 \lambda^3 a_1 + 6\alpha k^2 \lambda a_0 a_1 + 8m^2 \mu a_2 + 4m^2 \lambda^2 a_2) \left(\frac{G'}{G}\right)^2 + \\ & (16\beta k^4 \mu^2 a_1 + 12\alpha k^2 \lambda \mu a_0 a_2 + 22\gamma w^4 \mu \lambda^2 a_1 + 12\alpha k^2 \mu^2 a_1 a_2 + 30\beta k^4 \mu a_2 \lambda^3 + \\ & 2m^2 \mu a_1 + \gamma w^4 \lambda^4 a_1 + 22\beta k^4 \mu \lambda^2 a_1 + 6\alpha k^2 \lambda \mu a_1^2 + m^2 \lambda^2 a_1 + 16\gamma w^4 \mu^2 a_1 + \\ & 120\gamma w^4 \lambda \mu^2 a_2 + \beta k^4 \lambda^4 a_1 + 2\alpha k^2 \lambda^2 a_0 a_1 + 6m^2 \lambda \mu a_2 + 120\beta k^4 \lambda \mu^2 a_2 + \\ & 30\gamma w^4 \mu \lambda^3 a_2 + 4\alpha k^2 \mu a_0 a_1) \left(\frac{G'}{G}\right) + 16\beta k^4 \mu^3 a_2 + 8\gamma w^4 \lambda \mu^2 a_1 + 14\gamma w^4 \mu^2 \lambda^2 a_2 + \\ & 16\gamma w^4 \mu^3 a_2 + 4\alpha k^2 \mu^2 a_0 a_2 + 8\beta k^4 \lambda \mu^2 a_1 + 14\beta k^4 \mu^2 \lambda^2 a_2 + \gamma w^4 \mu \lambda^3 a_1 + m^2 \lambda \mu a_1 + \\ & 2\alpha k^2 \lambda \mu a_0 a_1 + 2m^2 \mu^2 a_2 + 2\alpha k^2 \mu^2 a_1^2 + \mu \beta k^4 \lambda^3 a_1 = 0 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikteki $\left(\frac{G'}{G}\right)^r$ ($r = 0, 1, \dots, 6$) ifadelerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin Maple 12 programı ile çözülmesiyle

$$a_0 = -\frac{\beta k^4 \lambda^2 + \gamma w^4 \lambda^2 + 8\gamma w^4 \mu + 8\beta k^4 \mu + m^2}{2\alpha k^2},$$

$$a_1 = -\frac{6\lambda(\beta k^4 + \gamma w^4)}{\alpha k^2},$$

$$a_2 = -\frac{6(\beta k^4 + \gamma w^4)}{\alpha k^2}$$

değerleri bulunur. Elde edilen a_0 , a_1 ve a_2 değerlerinin (4.1.9) eşitliğinde yerlerine yazılmasıyla

$$u(\xi) = -\frac{\beta k^4 \lambda^2 + \gamma w^4 \lambda^2 + 8\gamma w^4 \mu + 8\beta k^4 \mu + m^2}{2\alpha k^2} - \frac{6\lambda(\beta k^4 + \gamma w^4)}{\alpha k^2} \left(\frac{G'}{G}\right) - \frac{6(\beta k^4 + \gamma w^4)}{\alpha k^2} \left(\frac{G'}{G}\right)^2$$

eşitliği bulunur. Böylece (4.1.10) ile verilen eşitlik (4.1.4) adi türevli denklemin bir analitik çözümü olur. (4.1.6) eşitliğinin (4.1.10) denkleminde kullanılmasıyla (4.1.1) ile verilen kesirli mertebeden Benjamin Ono denkleminin analitik çözümleri:

$\Delta = \lambda^2 - 4\mu > 0$ olmak üzere

$$u_1(x, y, t) = -\frac{m^2 + k^4 \beta \lambda^2 + w^4 \gamma \lambda^2 + 8k^4 \beta \mu + 8w^4 \gamma \mu}{2k^2 \alpha} - \frac{3(k^4 \beta + w^4 \gamma) \lambda \left((-\lambda c_1 + \sqrt{\Delta} c_2) \cosh\left(\frac{1}{2} \sqrt{\Delta} \xi\right) + (\sqrt{\Delta} c_1 - \lambda c_2) \sinh\left(\frac{1}{2} \sqrt{\Delta} \xi\right) \right)}{k^2 \alpha \left(c_1 \cosh\left(\frac{1}{2} \sqrt{\Delta} \xi\right) + c_2 \sinh\left(\frac{1}{2} \sqrt{\Delta} \xi\right) \right)} - \frac{3(k^4 \beta + w^4 \gamma) \left((-\lambda c_1 + \sqrt{\Delta} c_2) \cosh\left(\frac{1}{2} \sqrt{\Delta} \xi\right) + (\sqrt{\Delta} c_1 - \lambda c_2) \sinh\left(\frac{1}{2} \sqrt{\Delta} \xi\right) \right)^2}{2k^2 \alpha \left(c_1 \cosh\left(\frac{1}{2} \sqrt{\Delta} \xi\right) + c_2 \sinh\left(\frac{1}{2} \sqrt{\Delta} \xi\right) \right)^2},$$

$\lambda^2 - 4\mu = 0$ olmak üzere

$$u_2(x, y, t) = -\frac{m^2 + 3k^4 \beta \lambda^2 + 3w^4 \gamma \lambda^2}{2k^2 \alpha} - \frac{3(k^4 \beta + w^4 \gamma) \lambda (2c_2 - \lambda(c_1 + \xi c_2))}{k^2 \alpha (c_1 + \xi c_2)} - \frac{3(k^4 \beta + w^4 \gamma) (2c_2 - \lambda(c_1 + \xi c_2))^2}{2k^2 \alpha c_1 + \xi c_2^2},$$

$\Delta = \lambda^2 - 4\mu < 0$ olmak üzere

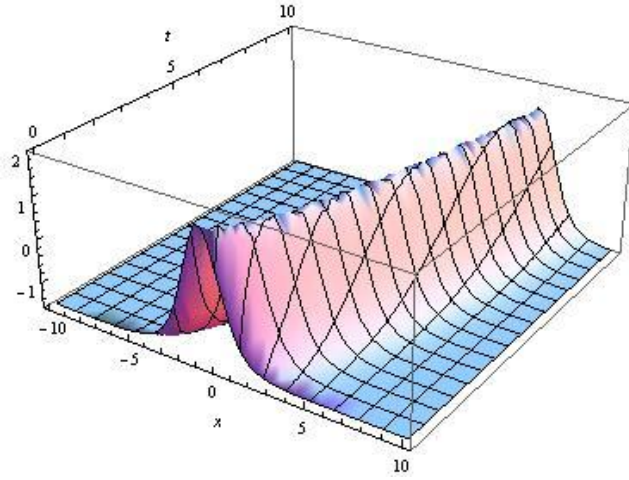
$$u_3(x, y, t) = -\frac{m^2 + k^4\beta\lambda^2 + w^4\gamma\lambda^2 + 8k^4\beta\mu + 8w^4\gamma\mu}{2k^2\alpha}$$

$$-\frac{3(k^4\beta + w^4\gamma)\lambda\left((- \lambda c_1 + \sqrt{\Delta}c_2)\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\xi\right) - (\sqrt{\Delta}c_1 + \lambda c_2)\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\xi\right)\right)}{k^2\alpha\left(c_1\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\xi\right) + c_2\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\xi\right)\right)}$$

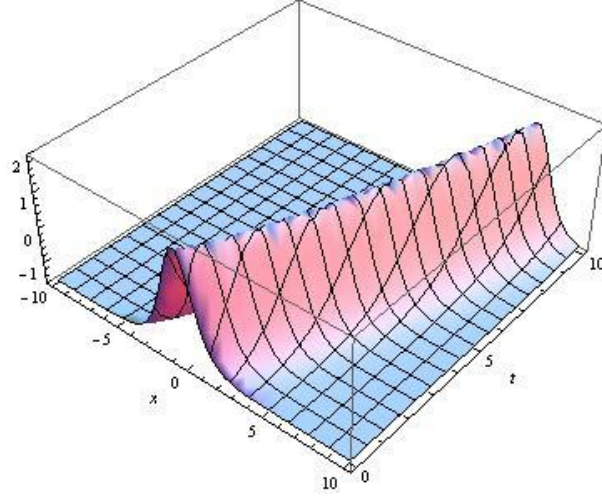
$$-\frac{3(k^4\beta + w^4\gamma)\left((- \lambda c_1 + \sqrt{\Delta}c_2)\cos\left[\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\xi\right] - (\sqrt{\Delta}c_1 + \lambda c_2)\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\xi\right)\right)^2}{2k^2\alpha\left(c_1\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\xi\right) + c_2\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\xi\right)\right)^2}$$

olarak bulunur. Burada c_1, c_2 keyfi sabitler olup, $\xi = kx + wy - m\frac{t^p}{p}$ şeklindedir.

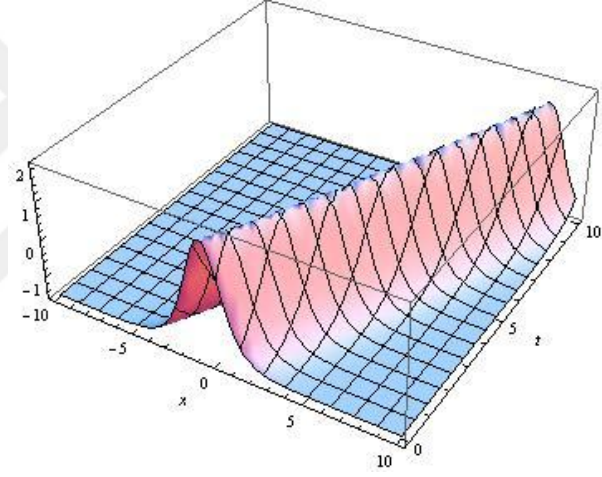
$c_1 = 2, c_2 = 1, k = 1, w = 0.1, m = 1, \gamma = 1, \beta = 1, \alpha = 1, y = 1$ ve farklı p değerlerinde $u_i(x, y, t), (i = 1, 2, 3)$ analitik çözümlerinin yüzeyleri Şekil 4.1- Şekil 4-9 ile verildi.



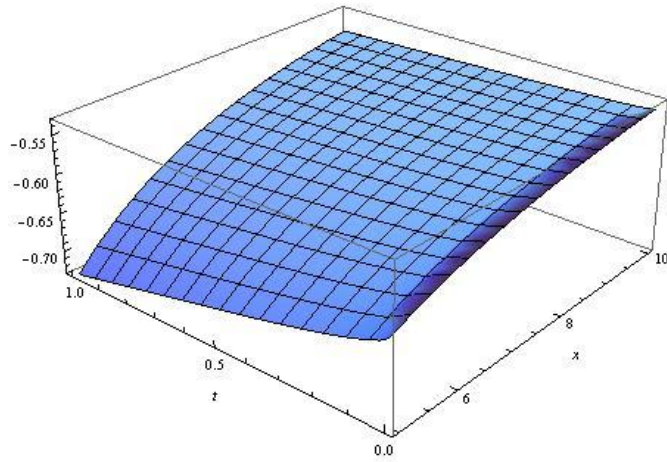
Şekil 4.1 $\lambda = 2, \mu = 0.5, p = 0.5$ için $u_1(x, y, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



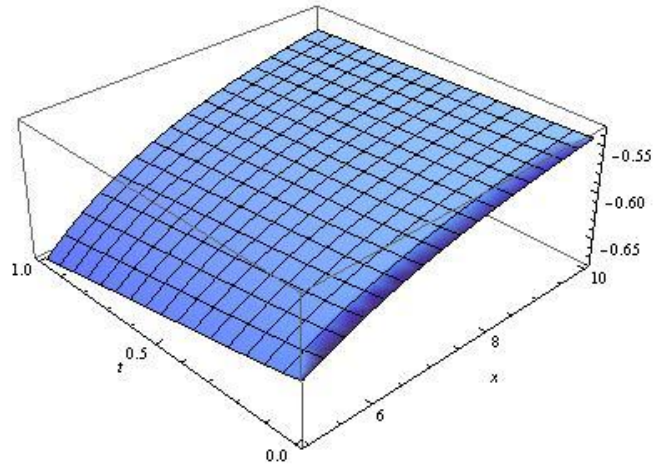
Şekil 4.2 $\lambda = 2, \mu = 0.5, p = 0.75$ için $u_1(x, y, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



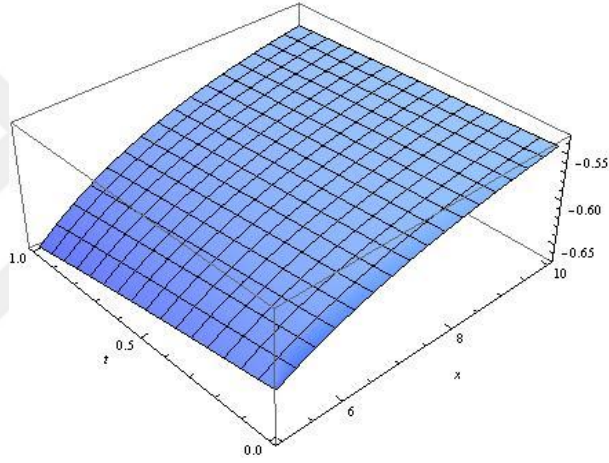
Şekil 4.3 $\lambda = 2, \mu = 0.5, p = 0.9$ için $u_1(x, y, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



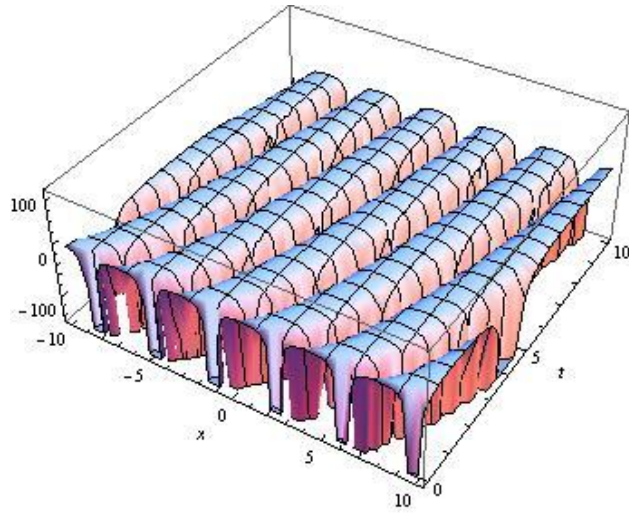
Şekil 4.4 $\lambda = 2, \mu = 1, p = 0.5$ için $u_2(x, y, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



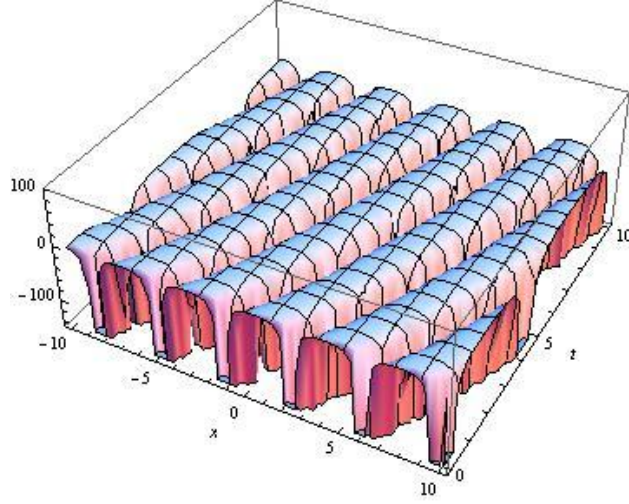
Şekil 4.5 $\lambda = 2, \mu = 1, p = 0.75$ için $u_2(x, y, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



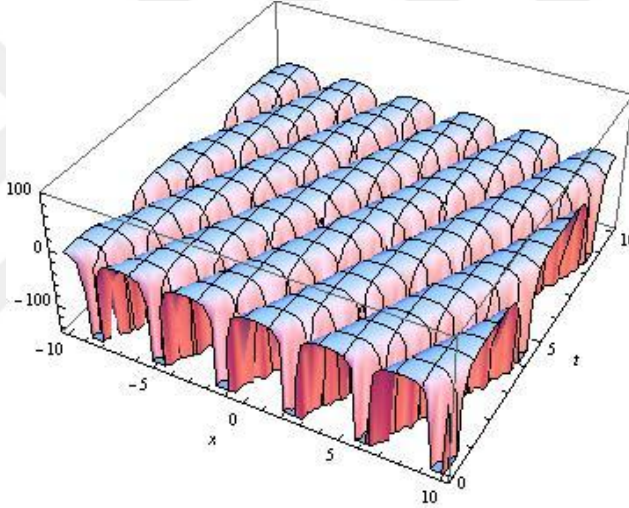
Şekil 4.6 $\lambda = 2, \mu = 1, p = 0.9$ için $u_2(x, y, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



Şekil 4.7 $\lambda = 1, \mu = 1, p = 0.5$ için $u_3(x, y, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



Şekil 4.8 $\lambda = 1, \mu = 1, p = 0.75$ için $u_3(x, y, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



Şekil 4.9 $\lambda = 1, \mu = 1, p = 0.9$ için $u_3(x, y, t)$ analitik çözümünün yüzeyi

4.2. Conformable Kesirli Mertebeden Birinci Genişletilmiş Jimbo-Miwa Denklemi

Conformable kesirli mertebeden türev içeren birinci genişletilmiş Jimbo-Miwa denklemi

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial y} + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} \right) - 3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (4.2.1)$$

olarak göz önüne alınsın. Burada $0 < \alpha < 1$ şeklindedir. (4.2.1) kısmi diferansiyel denkleminde $u = u(\xi)$ olmak üzere

$$\xi = kx + ly + mz + p \frac{t^\alpha}{\alpha} \quad (4.2.2)$$

şeklinde dalga dönüşümü uygulanırsa

$$lk^3 u^{(iv)} + 6lk^2 u'' u' + 2lp u'' - 3m(k + l + m)u'' = 0 \quad (4.2.3)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Elde edilen (4.2.3) adi türevli diferansiyel denklemin bir kez integrali alınır

$$lk^3 u''' + 3lk^2 (u')^2 + 2lp u' - 3m(k + l + m)u' = 0 \quad (4.2.4)$$

eşitliği bulunur. ξ bağımsız değişkenini içeren (4.2.4) adi türevli diferansiyel denkleminin, n pozitif bir tamsayı ve $G = G(\xi)$ olmak üzere (4.1.5) şeklinde analitik çözümünün olduğu kabul edilsin. (4.2.4) adi türevli denkleminde yer alan en yüksek mertebeden türev olan u''' terimi ile en yüksek mertebeden lineer olmayan terim içeren $(u')^2$ terimlerinin değerleri, (4.1.5) ve (4.1.6) eşitliklerinin kullanılmasıyla,

$$u''' = -n(n+1)(n+2)a_n \left(\frac{G'}{G}\right)^{n+3} + \dots \quad (4.2.5)$$

$$(u')^2 = n^2 a_n^2 \left(\frac{G'}{G}\right)^{2n+2} + \dots \quad (4.2.6)$$

olarak yazılır. (4.2.5) ve (4.2.6) eşitlikleri ile verilen u''' ve $(u')^2$ terimlerinin arasındaki homojen dengen

$$n + 3 = 2n + 2$$

eşitliği elde edilir. Elde edilen bu eşitlikten $n = 1$ değerinin bulunmasıyla, (4.2.4) adi türevli diferansiyel denklemde

$$u(\xi) = a_0 + a_1 \left(\frac{G'}{G}\right) \quad (4.2.7)$$

biçiminde analitik çözüm aranır. Burada a_0 ve a_1 daha sonra belirlenecek olan katsayılardır. (4.2.4) adi türevli diferansiyel denkleminde yer alan u' ve u''' terimlerinin değerleri, (4.2.7) ile verilen eşitliğin yardımıyla,

$$u' = -a_1 \left(\frac{G'}{G}\right)^2 - a_1 \lambda \left(\frac{G'}{G}\right) - a_1 \mu,$$

$$u''' = -6a_1 \left(\frac{g'}{g}\right)^4 - 12a_1\lambda \left(\frac{g'}{g}\right)^3 - (8a_1\mu + 7a_1\mu^2) \left(\frac{g'}{g}\right)^2 - (8a_1\lambda\mu + a_1\lambda^3) \left(\frac{g'}{g}\right) - 2a_1\mu^2 - a_1\lambda^2\mu$$

olarak bulunur. Bulunan u' ve u''' terimlerinin değerleri, (4.2.4) denkleminde yerlerine yazıldıktan sonra, elde edilen denklemde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} & (-6k^3la_1 + 3k^2la_1^2) \left(\frac{g'}{g}\right)^4 + (-12k^3l\lambda a_1 + 6k^2l\lambda a_1^2) \left(\frac{g'}{g}\right)^3 + (3mla_1 - \\ & 8k^3l\mu a_1 + 3k^2l\lambda^2 a_1^2 + 3kma_1 + 6k^2l\mu a_1^2 - 2pla_1 - 7k^3l\lambda^2 a_1 + 3m^2a_1) \left(\frac{g'}{g}\right)^2 + \\ & (3\lambda m^2a_1 - k^3l\lambda^3 a_1 + 6k^2l\lambda\mu a_1^2 - 2pl\lambda a_1 - 8k^3l\lambda\mu a_1 + 3km\lambda a_1 + \\ & 3ml\lambda a_1) \left(\frac{g'}{g}\right) + 3ml\mu a_1 - 2pl\mu a_1 + 3k^2l\mu^2 a_1^2 + 3km\mu a_1 - 2k^3l\mu^2 a_1 - \\ & k^3l\mu\lambda^2 a_1 + 3m^2\mu a_1 = 0 \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlikte yer alan $\left(\frac{g'}{g}\right)^r$ ($r = 0, 1, \dots, 4$) terimlerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle lineer olmayan bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Elde edilen bu denklem sisteminin Maple 12 programı ile çözülmesiyle

$$p = \frac{3m^2 - k^3l\lambda^2 + 4k^3l\mu + 3km + 3ml}{2l},$$

$$a_1 = 2k$$

biçiminde çözüm kümesi bulunur.

Elde edilen çözüm kümesinin (4.2.7) ve (4.2.2) eşitliklerinde kullanılması ile (4.2.1) zaman değişkenine göre conformable kesirli mertebeden birinci genişletilmiş Jimbo-Miwa denkleminin analitik çözümleri:

$$\Delta = \lambda^2 - 4\mu > 0 \text{ olmak üzere}$$

$$u_1(x, y, z, t) = a_0 + \frac{k \left((-\lambda c_1 + \sqrt{\Delta} c_2) \cosh\left(\frac{1}{2} \sqrt{\Delta} \xi\right) + (\sqrt{\Delta} c_1 - \lambda c_2) \sinh\left(\frac{1}{2} \sqrt{\Delta} \xi\right) \right)}{c_1 \cosh\left(\frac{1}{2} \sqrt{\Delta} \xi\right) + c_2 \sinh\left(\frac{1}{2} \sqrt{\Delta} \xi\right)}$$

olarak bulunur. Burada c_1, c_2 keyfi sabitler olup,

$$\xi = kx + ly + mz + \frac{(3km + 3lm + 3m^2 - k^3l\lambda^2 + 4k^3l\mu)t^\alpha}{2l\alpha}$$

şeklindedir.

$\lambda^2 - 4\mu = 0$ olmak üzere

$$u_2(x, y, z, t) = a_0 + \frac{k(2c_2 - \lambda(c_1 + \xi c_2))}{c_1 + \xi c_2}$$

şeklinde analitik çözüm elde edilir. Burada c_1, c_2 keyfi sabitler olup,

$$\xi = kx + ly + mz + \frac{(3km + 3lm + 3m^2)t^\alpha}{2l\alpha}$$

şeklindedir.

$\Delta = \lambda^2 - 4\mu < 0$ olmak üzere

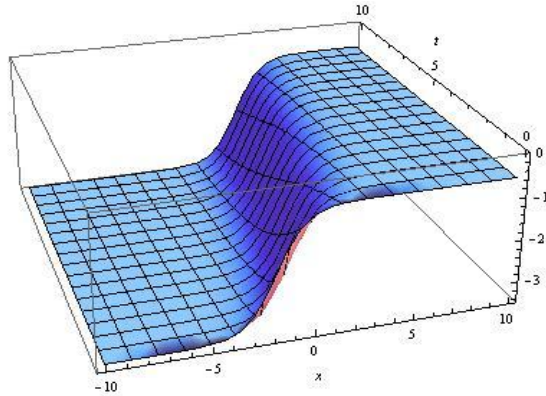
$$u_3(x, y, z, t) = a_0 + \frac{k \left((-\lambda c_1 + \sqrt{\Delta} c_2) \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\xi\right) - (\sqrt{\Delta} c_1 + \lambda c_2) \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\xi\right) \right)}{c_1 \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\xi\right) + c_2 \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\xi\right)}$$

şeklinde bulunur. Burada c_1, c_2 keyfi sabitler olup,

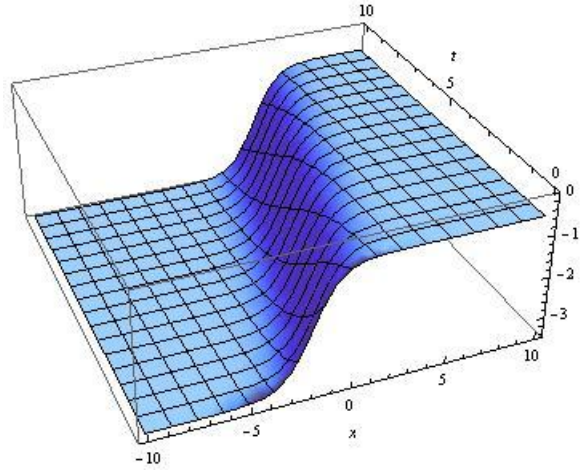
$$\xi = kx + ly + mz + \frac{(3km + 3lm + 3m^2 - k^3 l \lambda^2 + 4k^3 l \mu)t^\alpha}{2l\alpha}$$

şeklindedir.

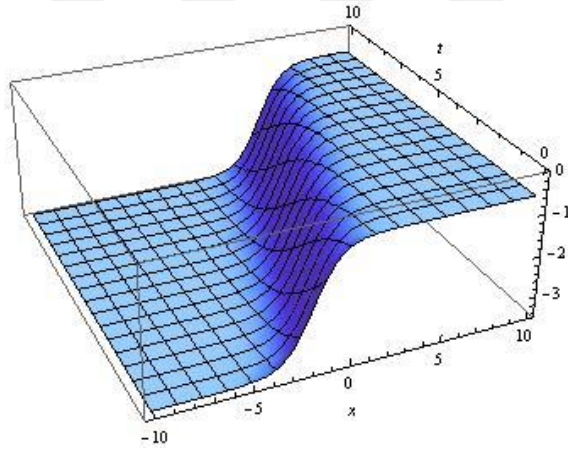
$c_1 = 2, c_2 = 1, k = 1, m = 0.1, l = 1, y = 1, z = 1, a_0 = 0$ ve farklı α değerlerinde $u_i(x, y, z, t), (i = 1, 2, 3)$ analitik çözümlerinin yüzeyleri Şekil 4.10- Şekil 4-18 ile verildi.



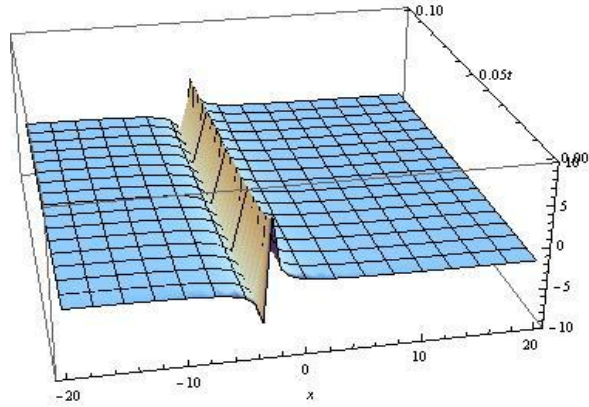
Şekil 4.10 $\lambda = 2, \mu = 0.5, \alpha = 0.5$ için $u_1(x, y, z, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



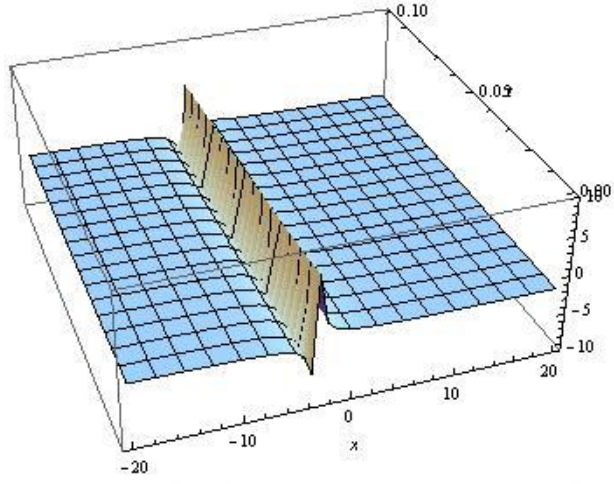
Şekil 4.11 $\lambda = 2, \mu = 0.5, \alpha = 0.75$ için $u_1(x, y, z, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



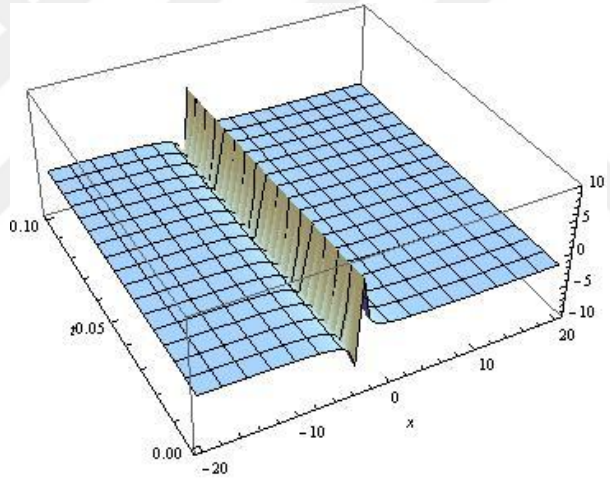
Şekil 4.12 $\lambda = 2, \mu = 0.5, \alpha = 0.9$ için $u_1(x, y, z, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



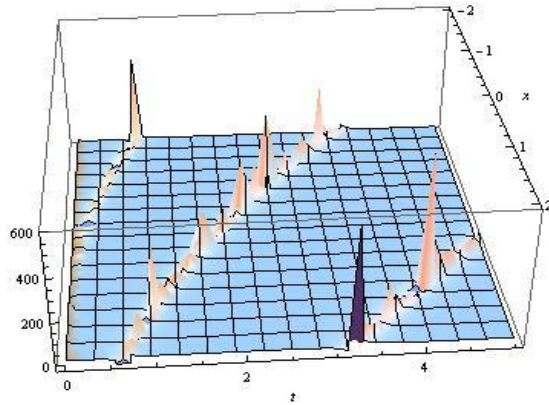
Şekil 4.13 $\lambda = 2, \mu = 1, \alpha = 0.5$ için $u_2(x, y, z, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



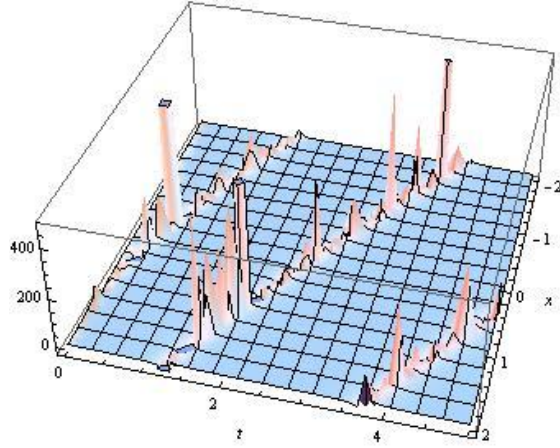
Şekil 4.14 $\lambda = 2, \mu = 1, \alpha = 0.75$ için $u_2(x, y, z, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



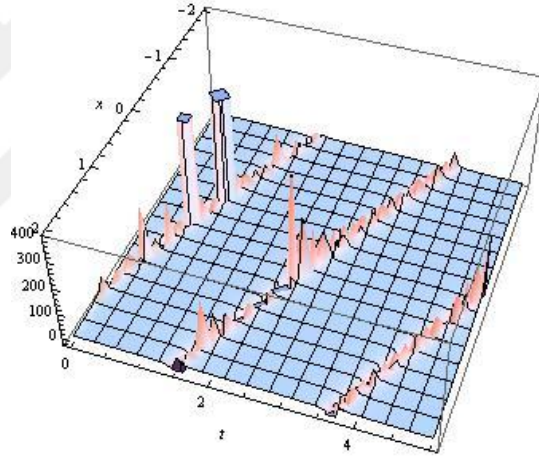
Şekil 4.15 $\lambda = 2, \mu = 1, \alpha = 0.9$ için $u_2(x, y, z, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



Şekil 4.16 $\lambda = 1, \mu = 1, \alpha = 0.5$ için $u_3(x, y, z, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



Şekil 4.17 $\lambda = 1, \mu = 1, \alpha = 0.75$ için $u_3(x, y, z, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



Şekil 4.18 $\lambda = 1, \mu = 1, \alpha = 0.9$ için $u_3(x, y, z, t)$ analitik çözümünün yüzeyi

4.3. Conformable Kesirli Mertebeden İkinci Genişletilmiş Jimbo-Miwa Denklemi

$0 < \alpha < 1$ olmak üzere conformable kesirli mertebeden türev içeren ikinci genişletilmiş Jimbo-Miwa denklemi

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial y} + 2 \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} \right) \right) - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0$$

olarak verilsin. Bu denkleme, $u = u(\xi)$ olmak üzere, (4.2.2) şeklinde dalga dönüşümü uygulanırsa

$$lk^3u^{(iv)} + 6lk^2u''u' + 2p(k + l + m)u'' - 3kmu'' = 0 \quad (4.3.1)$$

şeklinde adi türevli diferansiyel denklemi elde edilir. (4.3.1) denklemi bir kez integre edilirse

$$lk^3u''' + 3lk^2(u')^2 + 2p(k + l + m)u' - 3kmu' = 0 \quad (4.3.2)$$

denklemi bulunur. (4.3.2) denkleminde, n pozitif bir tamsayı ve $G = G(\xi)$ olmak üzere (4.1.5) şeklinde analitik çözüm aransın. (4.1.5) ve (4.1.6) eşitliklerinin yardımıyla, (4.3.2) denkleminde yer alan en yüksek mertebeden türev olan u''' terimi ile en yüksek mertebeden lineer olmayan terim içeren $(u')^2$ terimlerinin (4.2.5) ve (4.2.6) ile verilen değerlerinden u''' ve $(u')^2$ terimleri arasındaki homojen dengeden

$$n + 3 = 2n + 2$$

eşitliği bulunur ki, buradan $n = 1$ değeri elde edilir. Böylece (4.3.2) denkleminde (4.2.7) şeklinde çözüm aranır. (4.3.6) ile verilen eşitliğin yardımıyla (4.3.3) denkleminde yer alan u' ve u''' türevleri

$$u' = -a_1 \left(\frac{G'}{G}\right)^2 - a_1 \lambda \left(\frac{G'}{G}\right) - a_1 \mu,$$

$$u''' = -6a_1 \left(\frac{G'}{G}\right)^4 - 12a_1 \lambda \left(\frac{G'}{G}\right)^3 - (8a_1 \mu + 7a_1 \mu^2) \left(\frac{G'}{G}\right)^2 - (8a_1 \lambda \mu + a_1 \lambda^3) \left(\frac{G'}{G}\right) - 2a_1 \mu^2 - a_1 \lambda^2 \mu$$

olarak hesaplanır. Hesaplanan u' ve u''' türevlerinin değerleri (4.3.3) denkleminde yerlerine yazılır ve $\left(\frac{G'}{G}\right)$ terimlerinin kuvvetlerine göre düzenlenirse

$$\begin{aligned} & (3k^2la_1^2 - 6k^3la_1) \left(\frac{G'}{G}\right)^4 + (-12k^3\lambda a_1 + 6k^2\lambda a_1^2) \left(\frac{G'}{G}\right)^3 + (-8k^3\mu a_1 + \\ & 3kma_1 - 7k^3\lambda^2 a_1 - 2pka_1 + 3k^2\lambda^2 a_1^2 - 2pla_1 - 2pma_1 + 6k^2\mu a_1^2) \left(\frac{G'}{G}\right)^2 + \\ & (-2p\lambda a_1 + 3km\lambda a_1 + 6k^2\lambda\mu a_1^2 - 2pk\lambda a_1 - 8k^3\lambda\mu a_1 - k^3\lambda^3 a_1 - \\ & 2pm\lambda a_1) \left(\frac{G'}{G}\right) - 2p\mu a_1 - 2k^3\mu^2 a_1 - 2pk\mu a_1 - k^3\lambda\mu^2 a_1 + 3km\mu a_1 - 2pm\mu a_1 + \\ & 3k^2\mu^2 a_1^2 = 0 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada $\left(\frac{G'}{G}\right)^r$ ($r = 0,1, \dots, 4$) terimlerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle denklem sistemi bulunur. Bulunan bu denklem sisteminin Maple 12 programı ile çözülmesiyle

$$l = \frac{3k}{-3 + 4k^2\mu - k^2\lambda^2},$$

$$p = \frac{3k}{2},$$

$$a_1 = 2k$$

şeklinde çözüm kümesi elde edilir. Elde edilen bu çözüm kümesinin kullanılması ile kesirli mertebeden ikinci genişletilmiş Jimbo-Miwa denkleminin analitik çözümleri

$\Delta = \lambda^2 - 4\mu > 0$ olmak üzere

$$u_1(x, y, z, t) = a_0 + \frac{k \left((-\lambda c_1 + \sqrt{\Delta} c_2) \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\xi\right) + (\sqrt{\Delta} c_1 - \lambda c_2) \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\xi\right) \right)}{c_1 \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\xi\right) + c_2 \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\xi\right)}$$

olarak bulunur. Burada c_1, c_2 keyfi sabitler olup,

$$\xi = kx + \frac{3ky}{-3 - k^2\lambda^2 + 4k^2\mu} + mz + \frac{3kt^\alpha}{2\alpha}$$

şeklindedir.

$\lambda^2 - 4\mu = 0$ olmak üzere

$$u_2(x, y, z, t) = a_0 + \frac{k(2c_2 - \lambda(c_1 + \xi c_2))}{c_1 + \xi c_2}$$

elde edilir. Burada c_1, c_2 keyfi sabitler olup,

$$\xi = kx - ky + mz + \frac{3kt^\alpha}{2\alpha}$$

şeklindedir.

$\Delta = \lambda^2 - 4\mu < 0$ olmak üzere

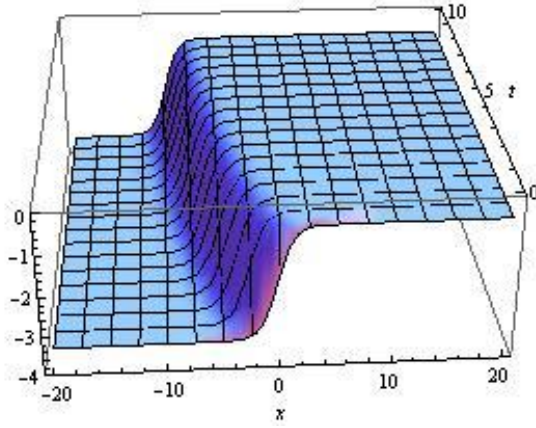
$$u_3(x, y, z, t) = a_0 + \frac{k \left((-\lambda c_1 + \sqrt{\Delta} c_2) \cos\left(\frac{1}{2} \sqrt{\Delta} \xi\right) - (\sqrt{\Delta} c_1 + \lambda c_2) \sin\left(\frac{1}{2} \sqrt{\Delta} \xi\right) \right)}{c_1 \cos\left(\frac{1}{2} \sqrt{\Delta} \xi\right) + c_2 \sin\left(\frac{1}{2} \sqrt{\Delta} \xi\right)}$$

şeklinde bulunur. Burada c_1, c_2 keyfi sabitler olup,

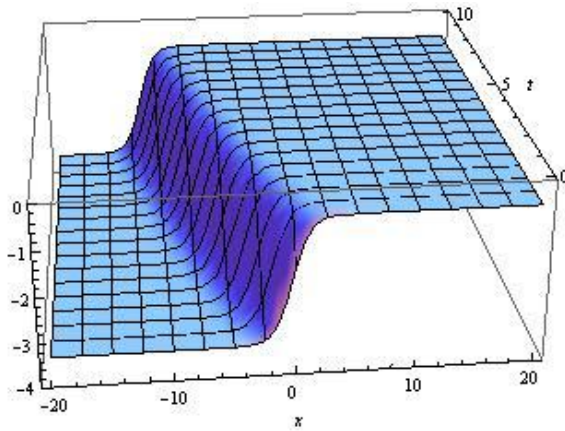
$$\xi = kx + \frac{3ky}{-3 - k^2\lambda^2 + 4k^2\mu} + mz + \frac{3kt^\alpha}{2\alpha}$$

şeklindedir.

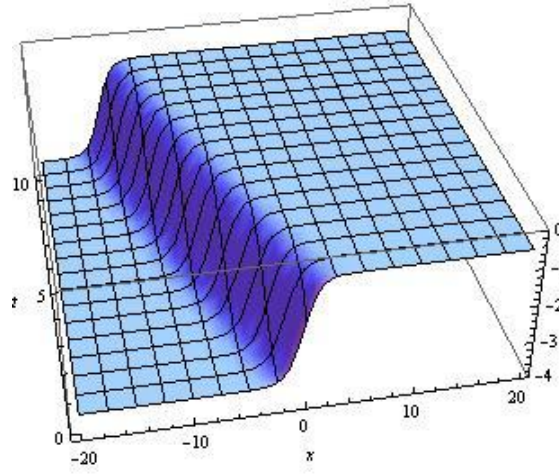
$c_1 = 2, c_2 = 1, k = 1, m = 0.1, y = 1, z = 1, a_0 = 0$ ve farklı α değerlerinde $u_i(x, y, z, t), (i = 1, 2, 3)$ analitik çözümlerinin yüzeyleri Şekil 4.19- Şekil 4-27 ile verildi.



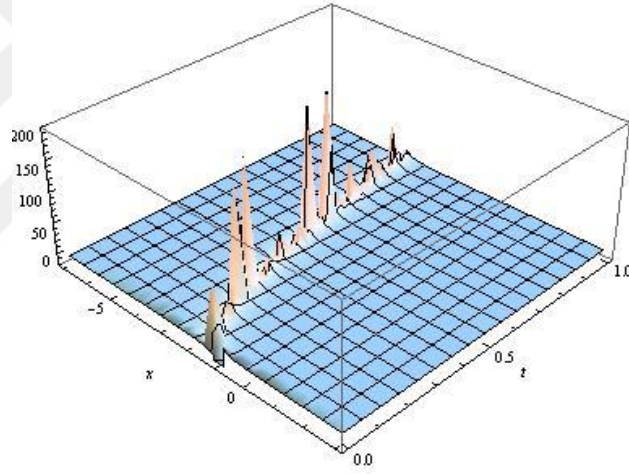
Şekil 4.19 $\lambda = 2, \mu = 0.5, \alpha = 0.5$ için $u_1(x, y, z, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



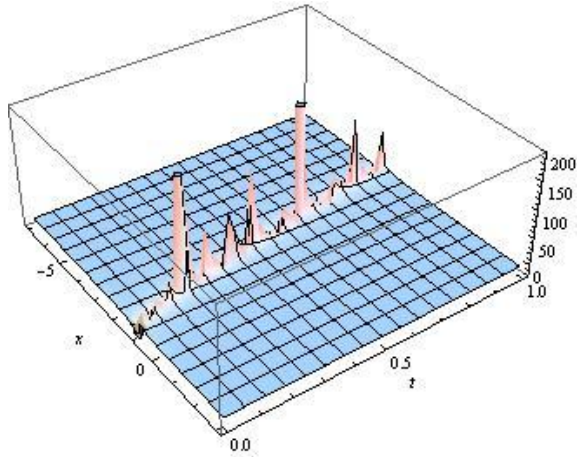
Şekil 4.20 $\lambda = 2, \mu = 0.5, \alpha = 0.75$ için $u_1(x, y, z, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



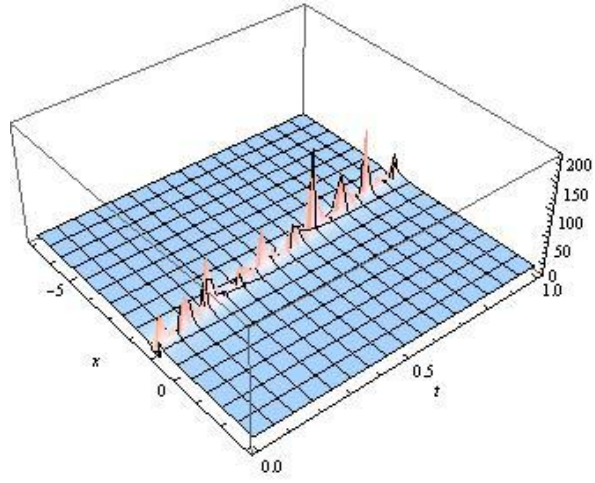
Şekil 4.21 $\lambda = 2, \mu = 0.5, \alpha = 0.9$ için $u_1(x, y, z, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



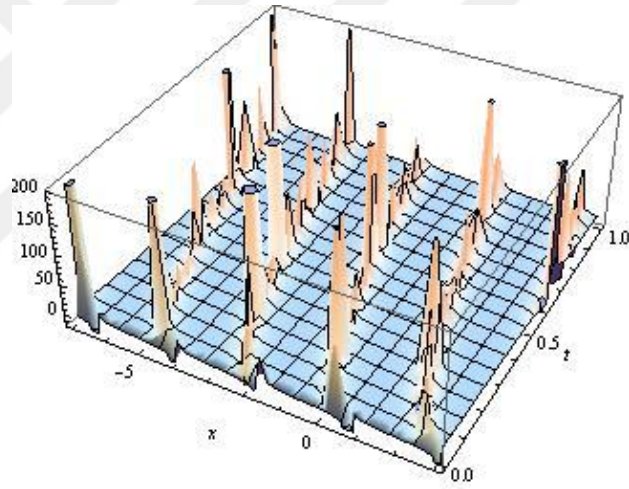
Şekil 4.22 $\lambda = 2, \mu = 1, \alpha = 0.5$ için $u_2(x, y, z, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



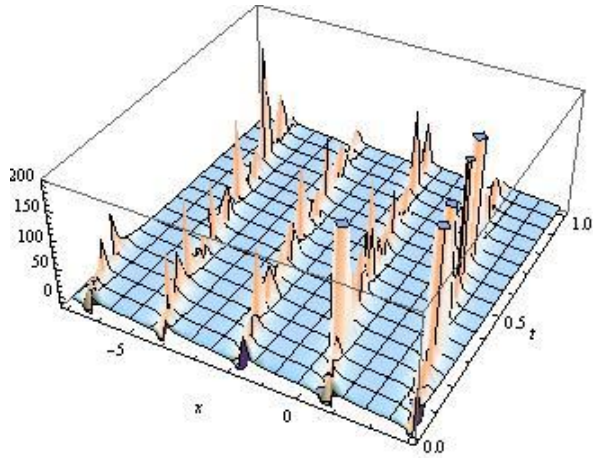
Şekil 4.23 $\lambda = 2, \mu = 1, \alpha = 0.75$ için $u_2(x, y, z, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



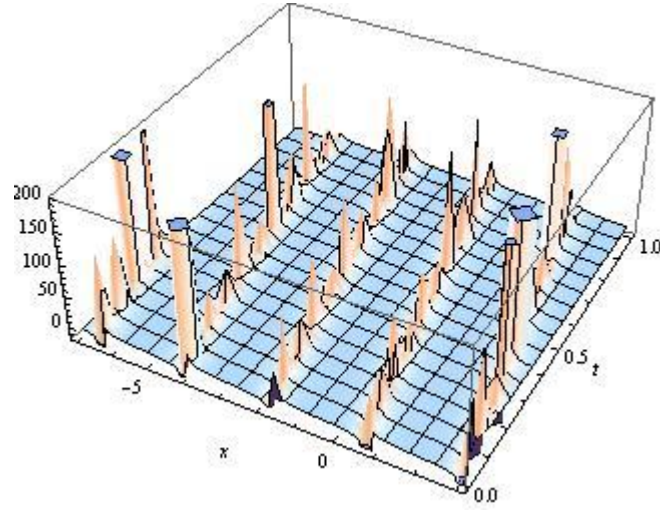
Şekil 4.24 $\lambda = 2, \mu = 1, \alpha = 0.9$ için $u_2(x, y, z, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



Şekil 4.25 $\lambda = 1, \mu = 2, \alpha = 0.5$ için $u_3(x, y, z, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



Şekil 4.26 $\lambda = 1, \mu = 2, \alpha = 0.75$ için $u_3(x, y, z, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



Şekil 4.27 $\lambda = 1, \mu = 2, \alpha = 0.9$ için $u_3(x, y, z, t)$ analitik çözümünün yüzeyi

4.4. Conformable Kesirli Mertebeden (3+1) Boyutlu Genelleştirilmiş KP Denklemleri

$0 < \alpha < 1$ olmak üzere zaman değişkenine göre conformable kesirli mertebeden kısmi türev içeren $(3 + 1)$ boyutlu genelleştirilmiş KP denklemi

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} + 3 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (4.4.1)$$

olarak verilsin. (4.4.1) kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denkleminin $u = u(\xi)$ olmak üzere (4.2.2) eşitliği ile verilen dalga dönüşümü uygulanırsa, ξ bağımsız değişken olmak üzere

$$lk^3 u^{(iv)} + 6lk^2 u'' u' + (pk + pl - m^2) u'' = 0 \quad (4.4.2)$$

şeklinde tamsayı mertebeden adi türevli diferansiyel denklemi elde edilir. (4.4.2) denkleminin bir kez integrali alınırsa

$$lk^3 u''' + 3lk^2 (u')^2 + (pk + pl - m^2) u' = 0 \quad (4.4.3)$$

denklemi elde edilir. (4.4.3) denkleminde (4.1.5) formunda analitik çözüm aranmak üzere, (4.1.5) ve (4.1.6) eşitliklerinin yardımıyla, (4.4.3) denkleminde yer alan en yüksek mertebeden türev olan u''' teriminin (4.2.5) değeri ile en yüksek mertebeden

lineer olmayan terim içeren $(u')^2$ teriminin (4.2.6) değeri arasındaki homojen dengeden $n = 1$ değeri elde edilir. Böylece (4.4.3) adi türevli diferansiyel denkleminde (4.2.7) formunda analitik çözüm aranır. (4.2.7) ile verilen eşitliğin, (4.4.3) denkleminde yer alan u' ve u''' türevlerinin hesaplanmasında kullanılmasıyla

$$u' = -a_1 \left(\frac{G'}{G}\right)^2 - a_1 \lambda \left(\frac{G'}{G}\right) - a_1 \mu,$$

$$u''' = -6a_1 \left(\frac{G'}{G}\right)^4 - 12a_1 \lambda \left(\frac{G'}{G}\right)^3 - (8a_1 \mu + 7a_1 \mu^2) \left(\frac{G'}{G}\right)^2 - (8a_1 \lambda \mu + a_1 \lambda^3) \left(\frac{G'}{G}\right) - 2a_1 \mu^2 - a_1 \lambda^2 \mu$$

eşitlikleri bulunur. Bu türevlerin değerleri (4.4.3) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & (-6k^3 l a_1 + 3k^2 l a_1^2) \left(\frac{G'}{G}\right)^4 + (6k^2 l \lambda a_1^2 - 12k^3 l \lambda a_1) \left(\frac{G'}{G}\right)^3 + (-7k^3 l \lambda^2 a_1 + \\ & 6k^2 l \mu a_1^2 + m^2 a_1 - 8k^3 l \mu a_1 - p k a_1 + 3k^2 l \lambda^2 a_1^2 - p l a_1) \left(\frac{G'}{G}\right)^2 + (-8k^3 l \lambda \mu a_1 - \\ & p k \lambda a_1 + m^2 \lambda a_1 + 6k^2 l \lambda \mu a_1^2 - k^3 l \lambda^3 a_1 - p l \lambda a_1) \left(\frac{G'}{G}\right) + m^2 \mu a_1 - p l \mu a_1 - p k \mu a_1 - \\ & 2k^3 l \mu^2 a_1 - k^3 l \mu \lambda^2 a_1 + 3k^2 l \mu^2 a_1^2 = 0 \end{aligned}$$

denklemini bulunur. Bu denklemdeki $\left(\frac{G'}{G}\right)^r$ ($r = 0, 1, \dots, 4$) terimlerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle elde edilecek olan denklem sisteminin Maple 12 programı ile çözülmesiyle

$$p = \frac{m^2 + 4k^3 l \mu - k^3 l \lambda^2}{l + k},$$

$$a_1 = 2k$$

şeklinde çözüm kümesi elde edilir. Elde edilen bu çözüm kümesinden conformable kesirli mertebeden (3+1) boyutlu genişletilmiş KP denkleminin analitik çözümleri

$$\Delta = \lambda^2 - 4\mu > 0 \text{ olmak üzere}$$

$$u_1(x, y, z, t) = a_0 + \frac{k \left((-\lambda c_1 + \sqrt{\Delta} c_2) \cosh\left(\frac{1}{2} \sqrt{\Delta} \xi\right) + (\sqrt{\Delta} c_1 - \lambda c_2) \sinh\left(\frac{1}{2} \sqrt{\Delta} \xi\right) \right)}{c_1 \cosh\left(\frac{1}{2} \sqrt{\Delta} \xi\right) + c_2 \sinh\left(\frac{1}{2} \sqrt{\Delta} \xi\right)}$$

olarak bulunur. Burada c_1, c_2 keyfi sabitler olup,

$$\xi = kx + ly + mz + \frac{(m^2 - k^3 l \lambda^2 + 4k^3 l \mu)t^\alpha}{(k + l)\alpha}$$

şeklindedir.

$$\lambda^2 - 4\mu = 0 \text{ olmak üzere}$$

$$u_2(x, y, z, t) = a_0 + \frac{k(2c_2 - \lambda(c_1 + \xi c_2))}{c_1 + \xi c_2}$$

eşitliği bulunur. Burada c_1, c_2 keyfi sabitler olup,

$$\xi = kx + ly + mz + \frac{m^2 t^\alpha}{(k + l)\alpha}$$

şeklindedir.

$$\Delta = \lambda^2 - 4\mu < 0 \text{ olmak üzere}$$

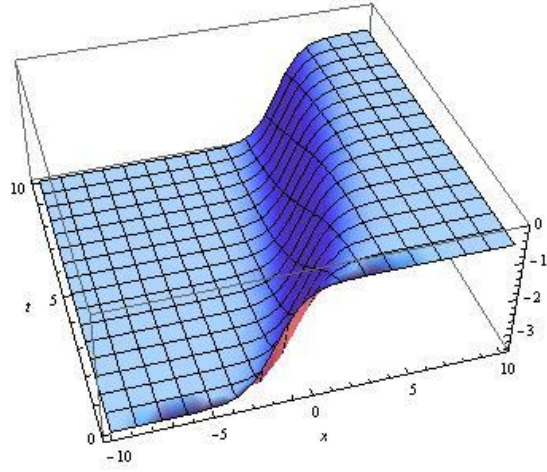
$$u_3(x, y, z, t) = a_0 + \frac{k \left((-\lambda c_1 + \sqrt{\Delta} c_2) \cos\left(\frac{1}{2} \sqrt{\Delta} \xi\right) - (\sqrt{\Delta} c_1 + \lambda c_2) \sin\left(\frac{1}{2} \sqrt{\Delta} \xi\right) \right)}{c_1 \cos\left(\frac{1}{2} \sqrt{\Delta} \xi\right) + c_2 \sin\left(\frac{1}{2} \sqrt{\Delta} \xi\right)}$$

şeklinde bulunur. Burada c_1, c_2 keyfi sabitler olup,

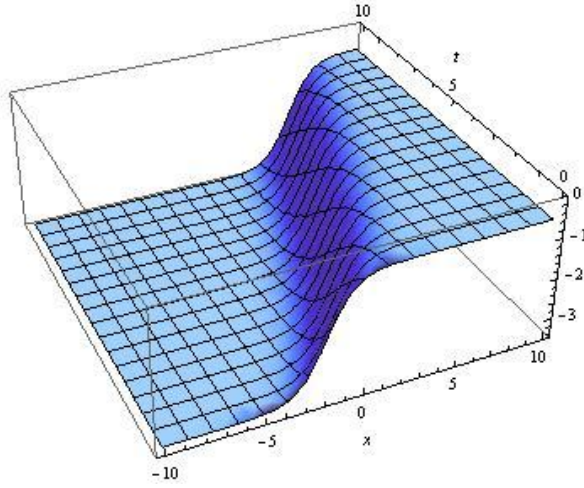
$$\xi = kx + ly + mz + \frac{(m^2 - k^3 l \lambda^2 + 4k^3 l \mu)t^\alpha}{(k + l)\alpha}$$

olarak alındı.

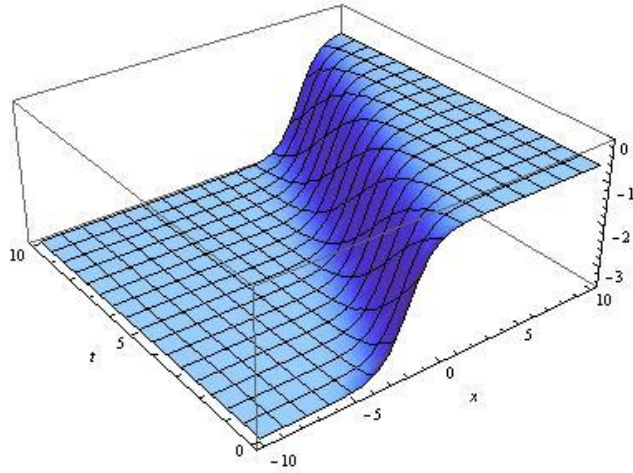
$c_1 = 2, c_2 = 1, k = 1, l = 1, m = 0.1, y = 1, z = 1, a_0 = 0$ ve farklı α değerlerinde $u_i(x, y, z, t), (i = 1, 2, 3)$ analitik çözümlerinin yüzeyleri Şekil 4.28- Şekil 4-36 ile verildi.



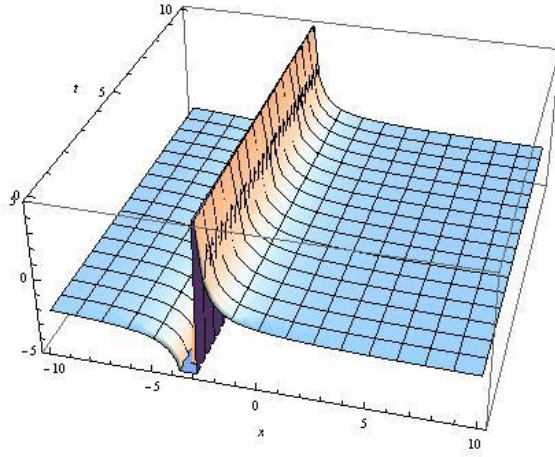
Şekil 4.28 $\lambda = 2, \mu = 0.5, \alpha = 0.5$ için $u_1(x, y, z, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



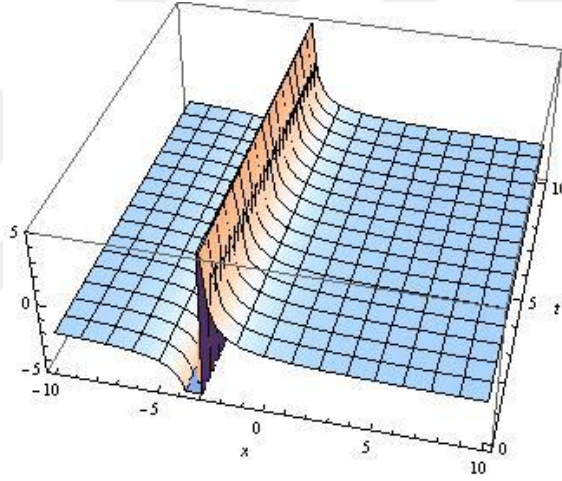
Şekil 4.29 $\lambda = 2, \mu = 0.5, \alpha = 0.75$ için $u_1(x, y, z, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



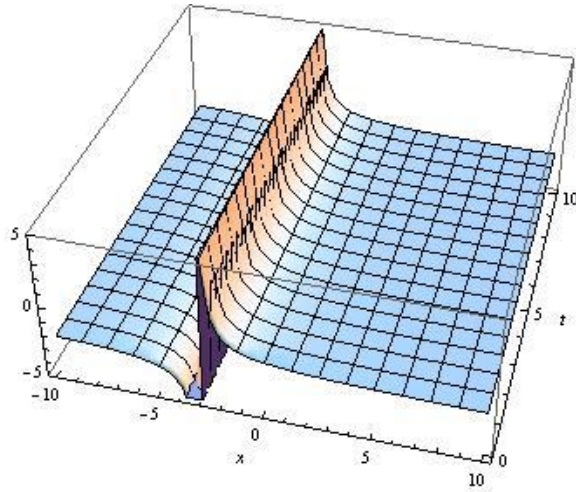
Şekil 4.30 $\lambda = 2, \mu = 0.5, \alpha = 0.9$ için $u_1(x, y, z, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



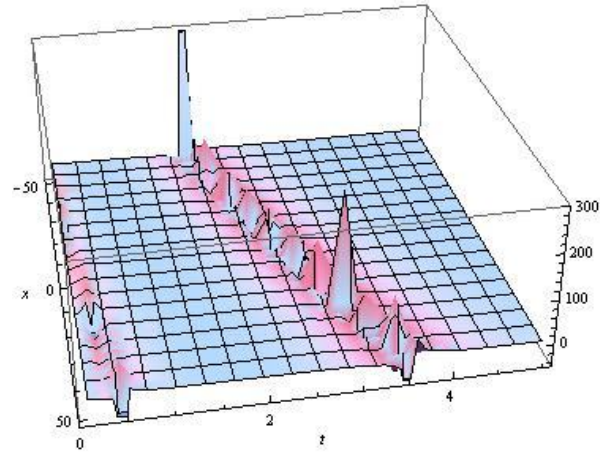
Şekil 4.31 $\lambda = 2, \mu = 1, \alpha = 0.5$ için $u_2(x, y, z, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



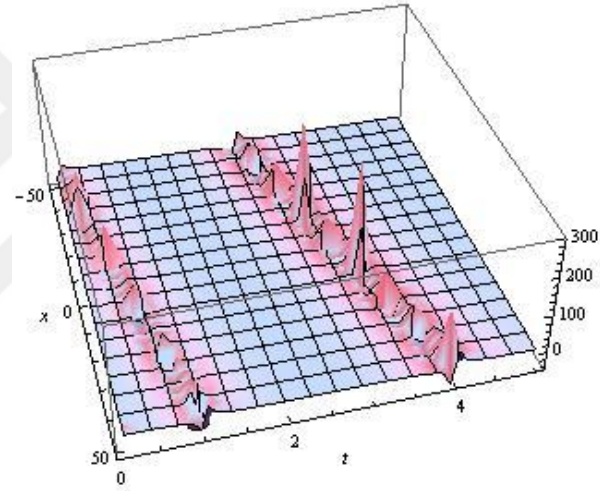
Şekil 4.32 $\lambda = 2, \mu = 1, \alpha = 0.75$ için $u_2(x, y, z, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



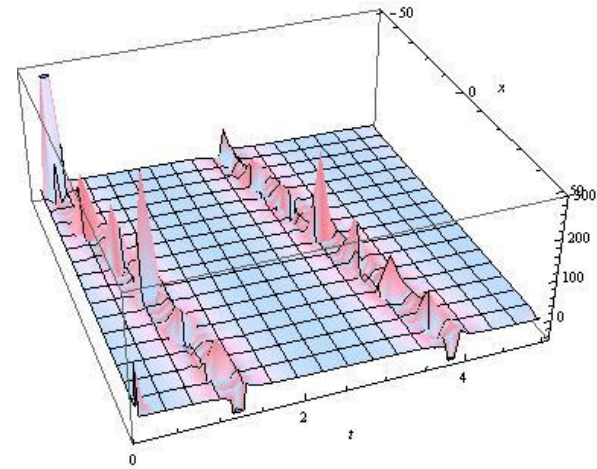
Şekil 4.33 $\lambda = 2, \mu = 1, \alpha = 0.9$ için $u_2(x, y, z, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



Şekil 4.34 $\lambda = 1, \mu = 1, \alpha = 0.5$ için $u_3(x, y, z, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



Şekil 4.35 $\lambda = 1, \mu = 1, \alpha = 0.75$ için $u_3(x, y, z, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



Şekil 4.36 $\lambda = 1, \mu = 1, \alpha = 0.9$ için $u_3(x, y, z, t)$ analitik çözümünün yüzeyi

4.5. Conformable Kesirli Mertebeden (3+1) Boyutlu Genelleştirilmiş BKP Denklemi

Zaman değişkenine göre conformable kesirli mertebeden kısmi türev içeren (3+1) boyutlu genelleştirilmiş BKP denklemi

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} \right) - \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} - 3 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0 \quad (4.5.1)$$

olarak alınsın. Burada $\alpha \in (0,1)$ şeklindedir. (4.5.1) kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denkleminde $u = u(\xi)$ olmak üzere (4.2.2) ile verilen dönüşüm uygulanır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(lp + 3km)u'' - lk^3 u^{(lv)} - 6lk^2 u'' u' = 0 \quad (4.5.2)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. (4.5.2) diferansiyel denkleminin bir kez integrali alınır

$$(lp + 3km)u' - lk^3 u''' - 3lk^2 (u')^2 = 0 \quad (4.5.3)$$

denklemi elde edilir. (4.5.3) denkleminin (4.1.5) formunda analitik çözümü aranır, (4.5.3) diferansiyel denkleminde yer alan, (4.2.5) ve (4.2.6) eşitlikleri ile değerleri verilen u''' ve $(u')^2$ terimleri arasındaki homojen dengeden $n = 1$ değeri bulunur. Sonuç olarak (4.5.3) adi türevli diferansiyel denklemin (4.2.7) formunda analitik çözümü aranır. (4.2.7) ile verilen eşitliğin, (4.5.3) denkleminde yer alan u' ve u''' türevlerinin hesaplanmasında kullanılmasıyla, u' ve u''' türevlerinin değerleri

$$u' = -a_1 \left(\frac{G'}{G} \right)^2 - a_1 \lambda \left(\frac{G'}{G} \right) - a_1 \mu,$$

$$u''' = -6a_1 \left(\frac{G'}{G} \right)^4 - 12a_1 \lambda \left(\frac{G'}{G} \right)^3 - (8a_1 \mu + 7a_1 \mu^2) \left(\frac{G'}{G} \right)^2 - (8a_1 \lambda \mu + a_1 \lambda^3) \left(\frac{G'}{G} \right) - 2a_1 \mu^2 - a_1 \lambda^2 \mu$$

olarak bulunur. Bu türevlerin değerleri, (4.5.3) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& (-3k^2la_1^2 + 6k^3la_1)\left(\frac{G'}{G}\right)^4 + (-6k^2l\lambda a_1^2 + 12k^3l\lambda a_1)\left(\frac{G'}{G}\right)^3 + (-3k^2l\lambda^2 a_1^2 - \\
& lp a_1 - 6k^2l\mu a_1^2 + 7k^3l\lambda^2 a_1 - 3kma_1 + 8k^3l\mu a_1)\left(\frac{G'}{G}\right)^2 + (-lp\lambda a_1 + 8k^3l\lambda\mu a_1 - \\
& 3km\lambda a_1 + k^3l\lambda^3 a_1 - 6k^2l\lambda\mu a_1^2)\left(\frac{G'}{G}\right) - lp\mu a_1 + 2k^3l\mu^2 a_1 - 3km\mu a_1 - \\
& 3k^2l\mu^2 a_1^2 + k^3l\mu\lambda^2 a_1 = 0
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlikteki $\left(\frac{G'}{G}\right)^r$ ($r = 0, 1, \dots, 4$) terimlerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle meydana gelen cebirsel denklem sisteminin çözülmesiyle

$$m = -\frac{l(p + 4k^3\mu - k^3\lambda^2)}{3k},$$

$$a_1 = 2k$$

şeklinde çözüm kümesi elde edilir. Elde edilen bu çözüm kümesinin yardımı ile kesirli mertebeden (3+1) boyutlu genişletilmiş BKP denkleminin analitik çözümleri

$$\Delta = \lambda^2 - 4\mu > 0 \text{ olmak üzere}$$

$$u_1(x, y, z, t) = a_0 + \frac{k\left((- \lambda c_1 + \sqrt{\Delta} c_2) \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\xi\right) + (\sqrt{\Delta} c_1 - \lambda c_2) \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\xi\right)\right)}{c_1 \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\xi\right) + c_2 \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\xi\right)}$$

olarak bulunur. Burada c_1, c_2 keyfi sabitler olup,

$$\xi = kx + ly - \frac{lz(p - k^3\lambda^2 + 4k^3\mu)}{3k} + \frac{pt^\alpha}{\alpha}$$

şeklindedir.

$$\lambda^2 - 4\mu = 0 \text{ olmak üzere}$$

$$u_2(x, y, z, t) = a_0 + \frac{k(2c_2 - \lambda(c_1 + \xi c_2))}{c_1 + \xi c_2}$$

Analitik çözümü elde edilir. Burada c_1, c_2 keyfi sabitler olup,

$$\xi = kx + ly - \frac{lpz}{3k} + \frac{pt^\alpha}{\alpha}$$

şeklindedir.

$\Delta = \lambda^2 - 4\mu < 0$ olması durumunda ise analitik çözüm

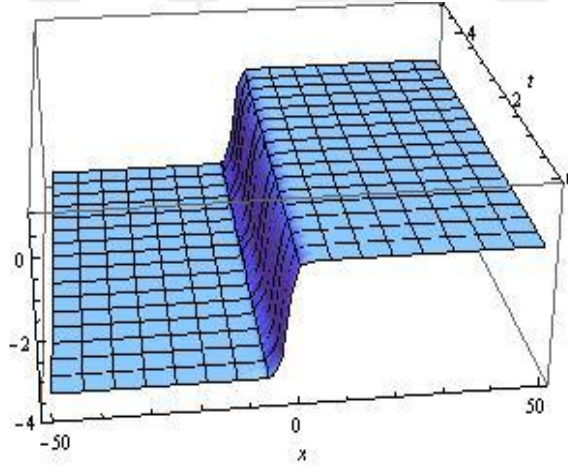
$$u_3(x, y, z, t) = a_0 + \frac{k \left((-\lambda c_1 + \sqrt{\Delta} c_2) \cos\left(\frac{1}{2} \sqrt{\Delta} \xi\right) - (\sqrt{\Delta} c_1 + \lambda c_2) \sin\left(\frac{1}{2} \sqrt{\Delta} \xi\right) \right)}{c_1 \cos\left(\frac{1}{2} \sqrt{\Delta} \xi\right) + c_2 \sin\left(\frac{1}{2} \sqrt{\Delta} \xi\right)}$$

şeklinde bulunur. Burada c_1, c_2 keyfi sabitler olup,

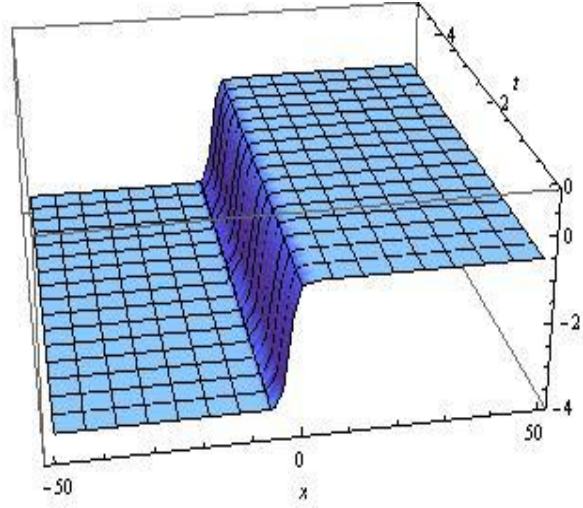
$$\xi = kx + ly + \frac{pt^\alpha}{\alpha} - \frac{lz(p - k^3\lambda^2 + 4k^3\mu)}{3k}$$

şeklindedir.

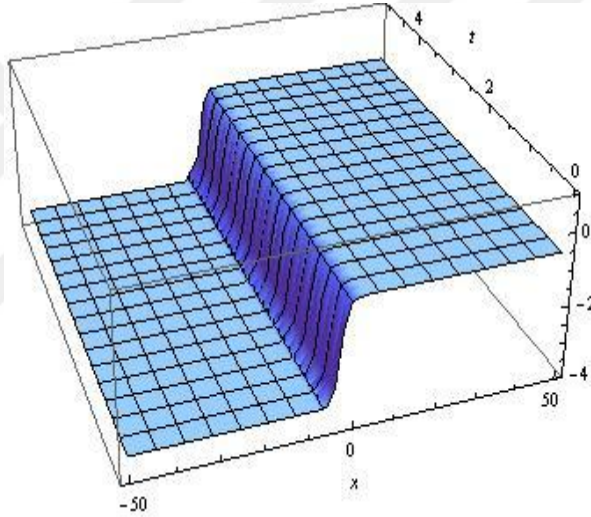
$c_1 = 2, c_2 = 1, k = 1, l = 1, p = 0.1, y = 1, z = 1, a_0 = 0$ ve farklı α değerlerinde $u_i(x, y, z, t), (i = 1, 2, 3)$ analitik çözümlerinin yüzeyleri Şekil 4.37- Şekil 4-45 ile verildi.



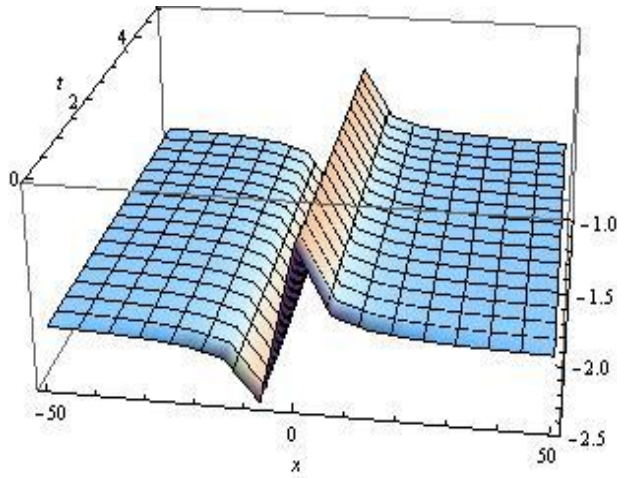
Şekil 4.37 $\lambda = 2, \mu = 0.5, \alpha = 0.5$ için $u_1(x, y, z, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



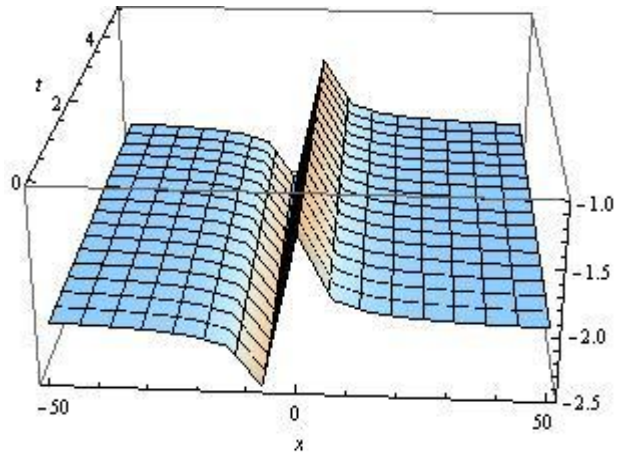
Şekil 4.38 $\lambda = 2, \mu = 0.5, \alpha = 0.75$ için $u_1(x, y, z, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



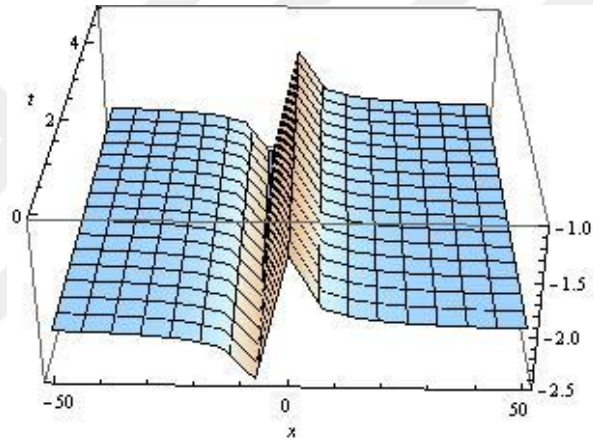
Şekil 4.39 $\lambda = 2, \mu = 0.5, \alpha = 0.9$ için $u_1(x, y, z, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



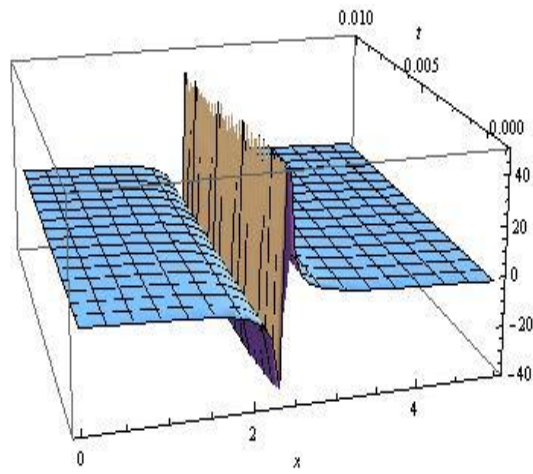
Şekil 4.40 $\lambda = 2, \mu = 1, \alpha = 0.5$ için $u_2(x, y, z, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



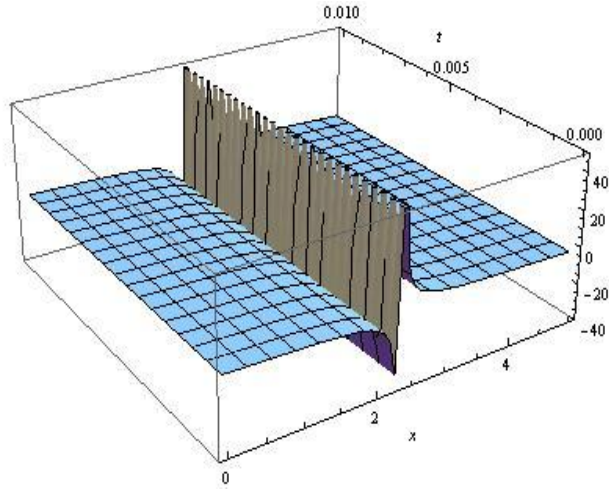
Şekil 4.41 $\lambda = 2, \mu = 1, \alpha = 0.75$ için $u_2(x, y, z, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



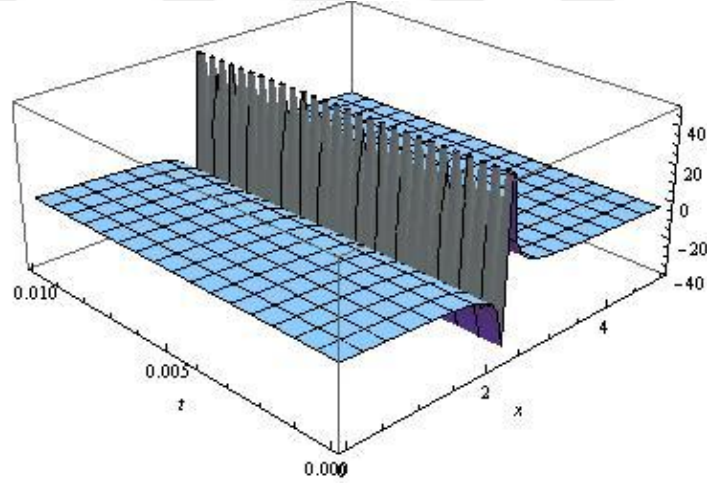
Şekil 4.42 $\lambda = 2, \mu = 1, \alpha = 0.9$ için $u_2(x, y, z, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



Şekil 4.43 $\lambda = 1, \mu = 1, \alpha = 0.5$ için $u_3(x, y, z, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



Şekil 4.44 $\lambda = 1, \mu = 1, \alpha = 0.75$ için $u_3(x, y, z, t)$ analitik çözümünün yüzeyi



Şekil 4.45 $\lambda = 1, \mu = 1, \alpha = 0.9$ için $u_3(x, y, z, t)$ analitik çözümünün yüzeyi

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, conformable kesirli mertebeden türev içeren lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem olan Benjamin Ono, birinci genişletilmiş Jimbo-Miwa, ikinci genişletilmiş Jimbo-Miwa, (3+1) boyutlu genelleştirilmiş KP ve (3+1) boyutlu genelleştirilmiş BKP denklemlerinin analitik çözümleri verildi.

Bu denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek için ilk olarak bu denklemlere dalga dönüşümü uygulanarak her bir denklem lineer olmayan adi türevli diferansiyel denkleme indirildi. Elde edilen adi türevli diferansiyel denklemlerde , $G = G(\xi)$ değeri

$$G'' + \lambda G' + \mu G = 0$$

adi türevli diferansiyel denkleminin bir çözümü olmak üzere,

$$u(\xi) = a_n \left(\frac{G'}{G} \right)^n + a_{n-1} \left(\frac{G'}{G} \right)^{n-1} + \dots \quad (5.1.1)$$

şeklinde analitik çözüm arandı. Bu çözüm formunda yer alan n değerinin belirlenmesinden sonra, bu çözümün ve gerekli türevlerinin denklemde yerine yazılmasıyla G'/G terimlerinin katsayıları sıfıra eşitlendi. Bu katsayıların sıfıra eşitlenmesiyle oluşan lineer olmayan cebirsel denklem sistemi Maple 12 programı yardımı ile çözülerek bazı değişkenlerin değeri bulundu. Bulunan bu değerlerin ve ξ değişkeninin değerinin (5.1.1) eşitliğinde yerlerine yazılmasıyla ele alınan denklemlerin analitik çözümleri elde edildi. Tezde göz önüne alınan her bir denklem için elde edilen analitik çözümlerin bazı değerleri için yüzeyleri verildi.

Sonuç olarak, conformable kesirli mertebeden türev içeren lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek için G'/G açılım yöntemi kullanılabilir. Ayrıca tezde ele alınan conformable kesirli mertebeden türev içeren lineer olmayan Benjamin Ono, birinci genişletilmiş Jimbo-Miwa, ikinci genişletilmiş Jimbo-Miwa, (3+1) boyutlu genelleştirilmiş KP ve (3+1) boyutlu genelleştirilmiş BKP denklemlerinin G'/G açılım yöntemi ile elde edilen analitik çözümleri, bu denklemler ile ilgili yapılacak olan nümerik çalışmalarla da karşılaştırılabilir.

KAYNAKLAR

- Benci, V., Fortunato, D., 2016. Hylomorphic solitons for the Benjamin–Ono and the fractional KdV equations. **Nonlinear Analysis**, 144:41-57.
- Bin, Z., 2012. (G'/G) -expansion method for solving fractional partial differential equations in the theory of mathematical physics. **Communications in Theoretical Physics**, 58: 623.
- Chen, H., Zhang, H., 2004. New multiple soliton-like solutions to the generalized $(2 + 1)$ -dimensional KP equation. **Appl. Math. Comput.**, 157: 765-773.
- Chen, Y., Yan, Z., Zhang, H., 2003. New explicit solitary wave solutions for $(2+1)$ dimensional Boussinesq equation and $(3+1)$ dimensional KP equation. **Physics Letters A**, 307: 107-113.
- Dutta, R., Holden, H., Koley, U., Risebro, N. H., 2015. Convergence of finite difference schemes for the Benjamin–Ono equation. **Numerische Mathematik**, 134: 49–274.
- Fang, C.-M., Tian, S.-F., Feng, Y., Dai, J.H., 2018. Interaction solutions for a reduced extended $(3+1)$ -dimensional Jimbo–Miwa equation. **Nonlinear Dyn**, 92:487–497.
- Gao, X.-Y., 2015. Bäcklund transformation and shock-wave-type solutions for a generalized $(3+1)$ -dimensional variable-coefficient B-type Kadomtsev–Petviashvili equation in fluid mechanics. **Ocean Engineering**, 96: 245-247.
- Jie-Fang, Z., Feng-Min, W., 2002. Bäcklund transformation and multiple-soliton solutions for the $(3+1)$ -dimensional Jimbo–Miwa equation. **Chinese Physics**, 11:425.
- Kaplan, M., San, S., Bekir, A., 2018. On The Exact Solutions And Conservation Laws To The Benjamin-Ono Equations. Journal of Applied Analysis and Computation. **Journal of Applied Analysis and Computation**, 8:1-9.
- Khalfallah, M., 2009. New exact traveling wave solutions of the $(3 + 1)$ dimensional Kadomtsev–Petviashvili (KP) equation. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, 14: 1169-1175.
- Khalil, R., Horani, M., Yousef, A., Sababheh, M., 2014. A new definition of fractional derivative. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 264:65-70.
- Kurt A., Tasbozan O., Baleanu D., 2017. New solutions for conformable fractional Nizhnik–Novikov–Veselov system via G'/G expansion method and homotopy analysis methods. **Optical and Quantum Electronics**, 49: 333.
- Lü, Z., Zhang, H., 2003. On a further extended tanh method. *Physics Letters A*, 307: 269-273.
- Ma, W.X., Lee, J.H., 2009. A transformed rational function method and exact solutions to the $(3+1)$ dimensional Jimbo–Miwa equation. **Chaos, Solitons and Fractals**, 42: 1356-1363.
- Ma, W.-X., Zhu, Z., 2012. Solving the $(3 + 1)$ -dimensional generalized KP and BKP equations by the multiple exp-function algorithm. **Applied Mathematics and Computation**, 218: 11871-11879.
- Podlubny, L., 1999. Fractional Differential Equations. **Academic Press**, London.
- Sun, H., Chen, A., 2017. Lump and lump–kink solutions of the $(3 + 1)$ -dimensional Jimbo–Miwa and two extended Jimbo–Miwa equations. **Applied Mathematics Letters**, 68: 55-61.

- Tu, J.M., Tian, S.F., Xu, M.J., Ma, P.L., Zhang, T.T., 2016. On periodic wave solutions with asymptotic behaviors to a (3+1) dimensional generalized B-type Kadomtsev–Petviashvili equation in fluid dynamics. **Computers and Mathematics with Applications**, 72: 2486-2504.
- Wang, D., Sun, W., Kong, C., Zhang, H., 2007. New extended rational expansion method and exact solutions of Boussinesq equation and Jimbo–Miwa equations. **Applied Mathematics and Computation**, 189: 878-886.
- Wang, M., Li, X., & Zhang, J., 2008. The (G' G)-expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics. **Physics Letters A**, 372: 417-423.
- Wang, Y. H., Wang, H., Dong, H. H., Zhang, H. S., Temuer, C., 2018. Interaction solutions for a reduced extended (3+1)-dimensional Jimbo–Miwa equation. **Nonlinear Dynamics**, 92:487-497.
- Wazwaz, A. M., 2007. Multiple-soliton solutions for the KP equation by Hirota's bilinear method and by the tanh–coth method. **Applied Mathematics and Computation**, 190: 633-640.
- Wazwaz, A. M., 2008. Multiple-soliton solutions for the Calogero–Bogoyavlenskii–Schiff, Jimbo–Miwa and YTSE equations. **Applied Mathematics and Computation**, 203: 592-597.
- Wazwaz, A. M., 2011. Distinct kinds of multiple-soliton solutions for a (3 + 1)-dimensional generalized B-type Kadomtsev–Petviashvili equation. **Phys. Scr.**, 84: 055006.
- Wazwaz, A. M., 2012. Multiple-soliton solutions for a (3 + 1)-dimensional generalized KP equation. **Commun Nonlinear Sci Numer Simulat.**, 17: 491-495.
- Wazwaz, A. M., 2017. Multiple-soliton solutions for extended (3 + 1) dimensional Jimbo–Miwa equations. **Applied Mathematics Letters**, 64: 21-26.
- Wazwaz, A. M., 2018. A (2 + 1)-dimensional extension of the Benjamin-Ono equation: Multiple soliton solutions and multiple complex soliton solutions. **International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow**, 28:2681-2687.
- Yang, H., Sun, J., Fu, C., Yang, H., 2019. Time-fractional Benjamin-Ono equation for algebraic gravity solitary waves in baroclinic atmosphere and exact multi-soliton solution as well as interaction. **Commun Nonlinear Sci Numer Simulat**, 71: 187-201.
- Zhang, J.B., Ma, W.X., 2017. Mixed lump-kink solutions to the BKP equation. **Computers and Mathematics with Applications**, 74: 591-596.
- Zhao, H.Q., Ma, W.X., Zhao, H., Ma, W.X., 2017. Mixed lump–kink solutions to the KP equation. **Computers and Mathematics with Applications**, 74: 1399-1405.
- Tan, W., Dai, Z., 2017. Spatiotemporal dynamics of lump solution to the (1 + 1)-dimensional Benjamin–Ono equation. **Nonlinear Dynamics**, 89: 2723–2728.

ÖZGEÇMİŞ

1 Ocak 1987’de, Antakya’da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini bu kentte tamamladı. 2005 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen Ve Matematik Alanları Eğitimi Bölümü Matematik Öğretmenliği Lisansla Birleştirilmiş Tezsiz Yüksek Lisans Programı’na kaydını yaptırdı. 2011 yılında Matematik Öğretmeni olarak mezun oldu. Özel sektörde öğretmenlik yapmaya başladı. 2013 yılında ilk çocuğunu kucağına aldığıında Hatay Mustafa Kemal Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda yüksek lisans eğitimine başladı. 2015 yılında sahip olduğu ikinci çocuk ile birlikte Akdeniz Üniversitesi Hukuk Fakültesi’ne kayıt yaptırdı. 2018’de hukuk fakültesinden mezun olarak aynı yıl Hatay Barosu’nda stajyer avukatlığa başladı, hala staj eğitim programına devam etmektedir.